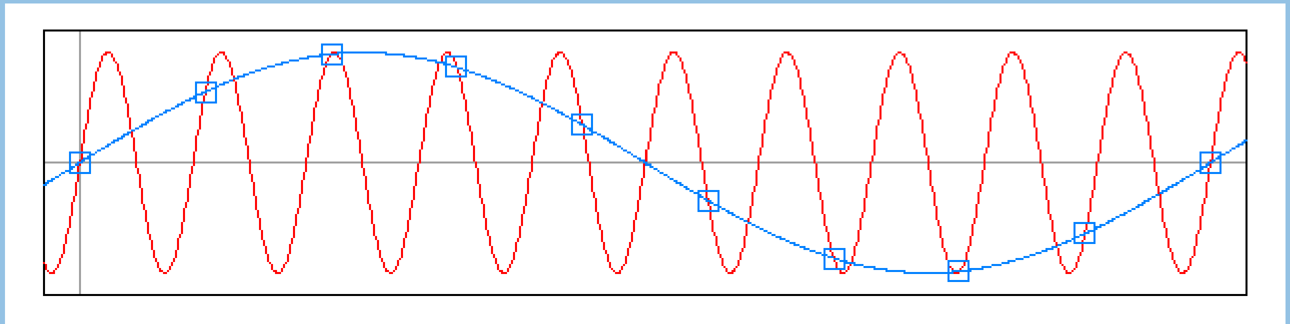
CAPITULO 3

Procesamiento digital de señales

Continuar

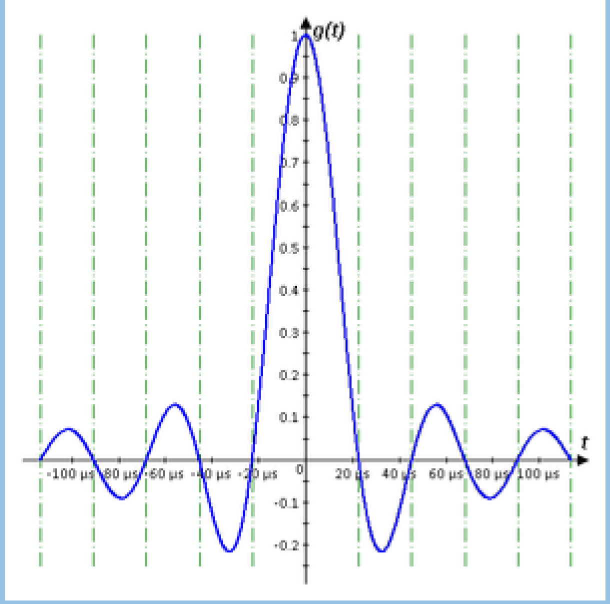
Introducción

En este capítulo se presenta la teoría y aplicaciones del procesamiento digital de señales empleando MATLAB. Para estudiar las características de las secuencias discretas, inicialmente se estudia el proceso de conversión analógico digital y los efectos del muestreo, y mediante ejemplos de simulación el lector podrá entender las consecuencias del fenómeno llamado Aliasing.



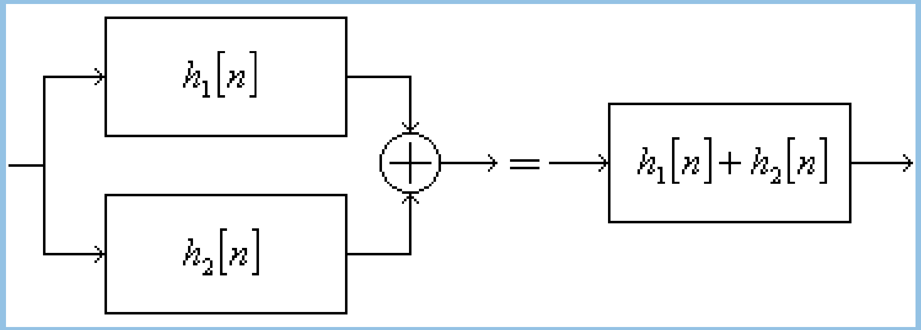
Teorema de muestreo

Antes de comenzar a analizar las secuencias discretas es importante conocer el proceso de conversión de una señal analógica a una señal discreta. Una secuencia digital se obtiene a partir de una señal analógica mediante el proceso denominado de muestreo, es decir, se toman muestras de la señal analógica a intervalos de tiempo fijo T.



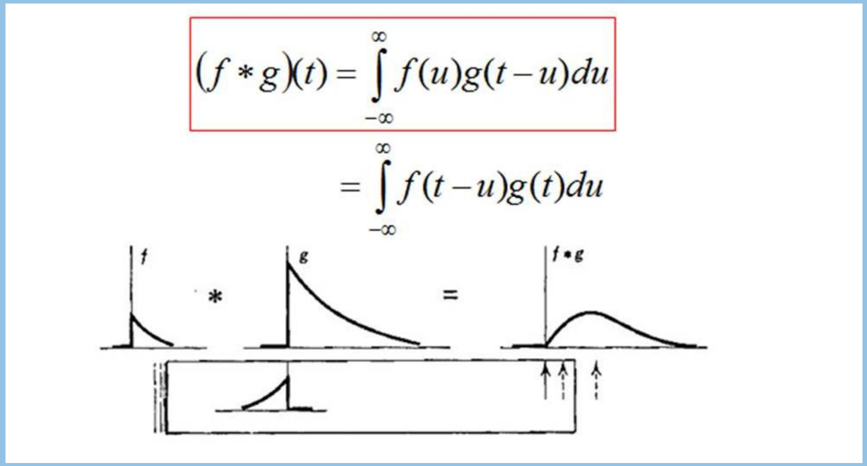
Sistemas lineales e invariantes en el tiempo

Una vez entendida la naturaleza de una secuencia discreta es importante conocer el efecto que tiene sobre un sistema específico. Un sistema recibe como entrada una señal discreta y la salida es una versión modificada de la entrada.



Convolución

La forma de determinar la salida del sistema a partir de una entrada asumiendo que se conoce la secuencia que caracteriza al sistema es mediante la suma de convolución. Puesto que la suma es de un número infinito de términos, para el caso de secuencias finitas se considera que los elementos valen cero fuera del rango de valor de éstas. La suma de convolución además es una operación que posee las propiedades de ser conmutativa y distributiva.



Ecuación diferencial de los sistemas discretos

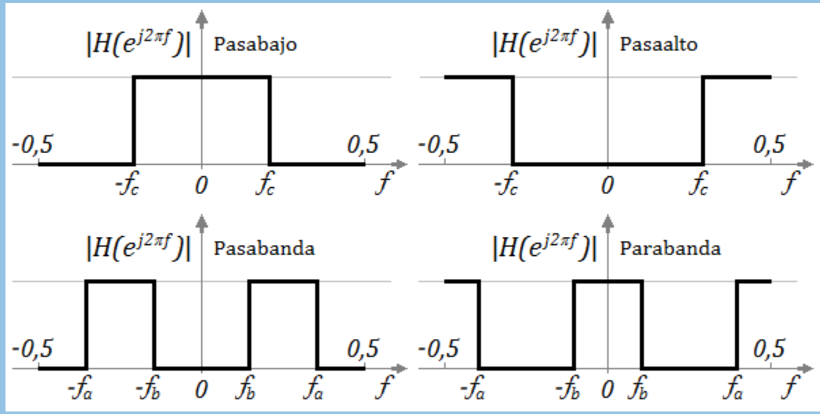
Un sistema se puede representar en el dominio del tiempo mediante la ecuación diferencial que relaciona la salida con la entrada del sistema. Esta ecuación representa un filtro digital. Los filtros también pueden representarse de forma gráfica mediante un diagrama que muestra el tipo de estructura del filtro.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & \cdots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{a_n} \end{bmatrix} [u(t)]$$

$$[y(t)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + [0]\,[u(t)]$$

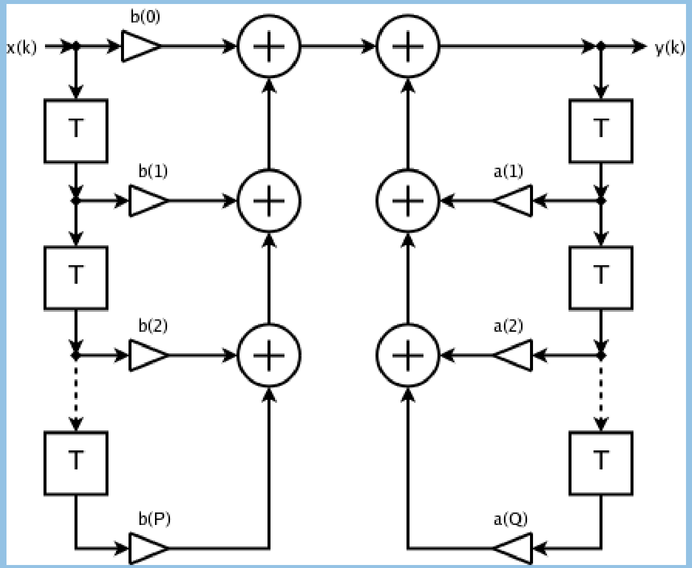
Filtros con respuesta al impulso finito FIR

Cuando la respuesta al impulso del filtro digital es una secuencia finita se denomina filtro con respuesta al impulso finito FIR.



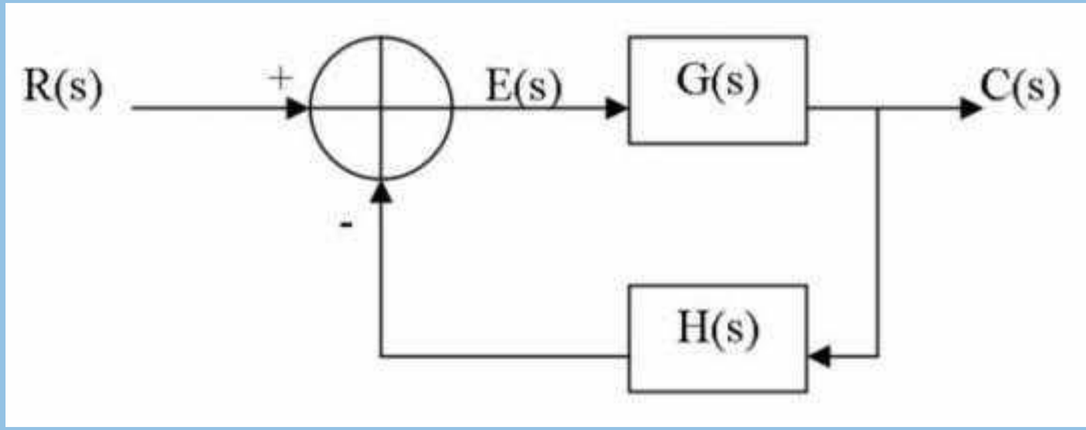
Filtros con respuesta al impulso infinito IIR

Cuando la respuesta al impulso del filtro digital es una secuencia infinita se denomina filtros con respuesta al impulso infinito IIR.



Función de transferencia

Se analizó que un sistema lineal e invariante en el tiempo se describe mediante la respuesta al impulso, sin embargo es importante conocer el comportamiento del sistema independientemente de la entrada. Por esta razón se estudia el comportamiento en frecuencia del sistema.



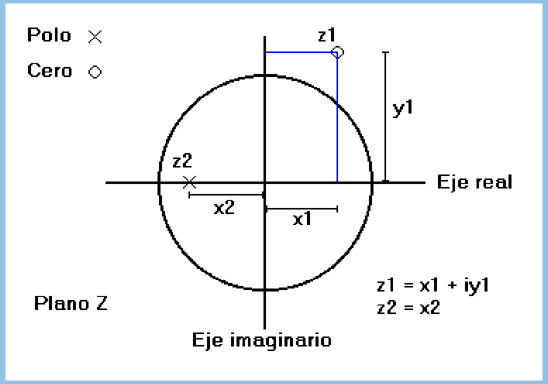
Transformada Z

La herramienta matemática que permite el estudio de los sistemas discretos lineales e invariantes en el tiempo es la llamada Transformada Z.

$$
\begin{aligned}
X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n)) z^{-n} \\
&= a_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n) z^{-n} + a_2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n) z^{-n} \\
&= a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z)
\end{aligned}
$$

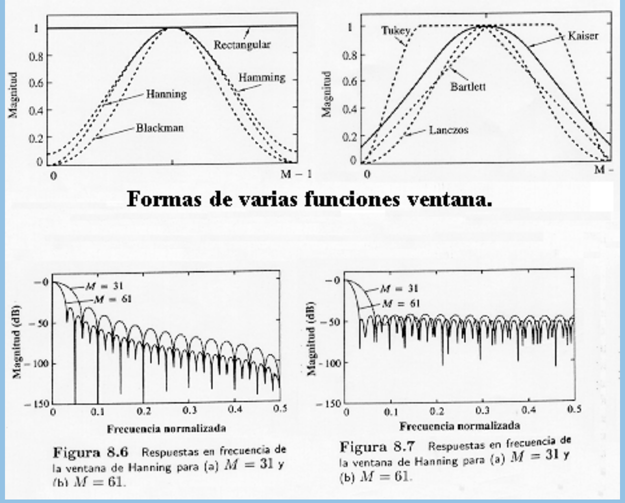
Diagrama de polos y ceros

La denominadas singularidades de la ecuación, es decir, las raíces de cada uno de los polinomios de Z producen dos casos especiales. Estos puntos permiten conocer las condiciones para las cuales el sistema es inestable. Las raíces del numerador representan los valores para los cuales la función de transferencia se hace cero, mientras que las raíces del denominador representan los polos del sistema debido a que estos hacen que la función del sistema se haga ∞.



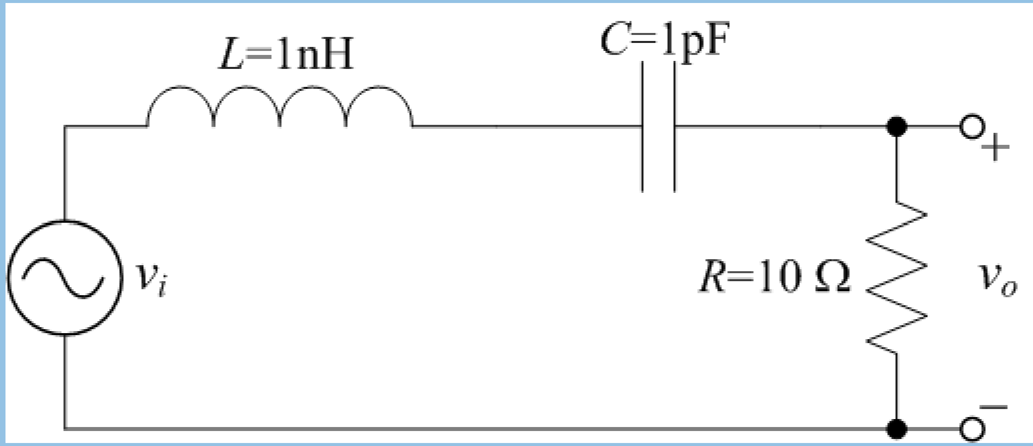
Diseño de filtros digitales

Para la implementación de un filtro digital es necesario primeramente el cálculo de los coeficientes adecuados que producen la respuesta deseada, generalmente se estudia la transformación de filtros analógicos a digitales. La función freqs permite graficar la respuesta de un filtro analógico representado por los coeficientes de la respuesta H (s).



Transformación de filtros analógicos mediante el método de invariancia

Un método para obtener el filtro digital a partir de un filtro analógico es conservando la correspondiente respuesta al impulso analógico. La respuesta al impulso del filtro digital es una versión muestreada del prototipo analógico.



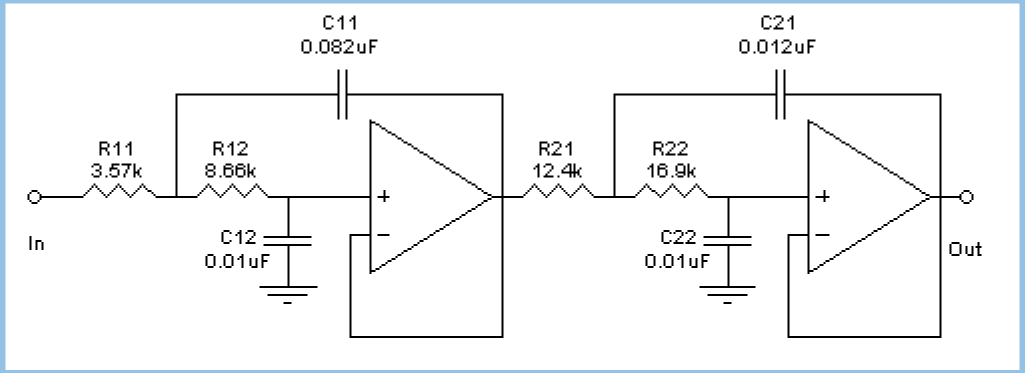
Transformación bilineal

Para evitar el problema de aliasing en la respuesta al impulso discreto se requiere de una transformación que realice un mapeo uno a uno, es decir, que a un punto en el plano s corresponda a un único punto en el plano z y viceversa.

$$
\begin{aligned}
s &= \frac{1}{T}\ln(z) \\
&= \frac{2}{T}\left[\frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^7 + \cdots\right] \\
&\approx \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1} \\
&= \frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}
\end{aligned}
$$

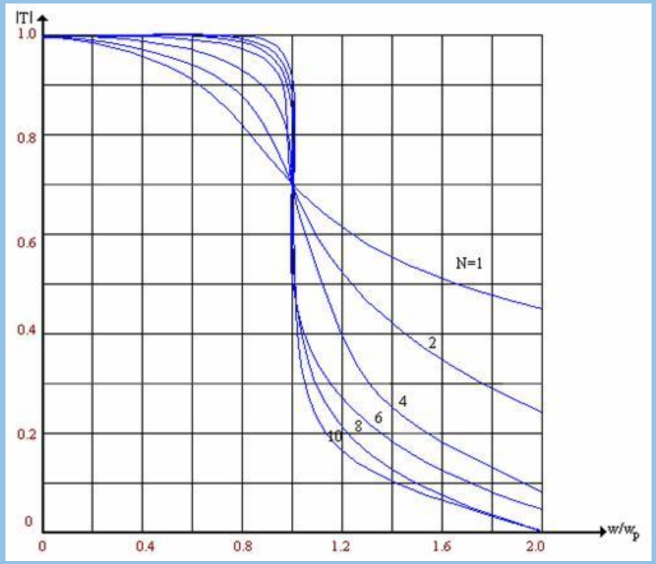
Principales tipos de filtros analógicos

Para aplicar la transformación de un filtro analógico a digital es necesario primero contar con el filtro analógico diseñado y perfectamente estudiado por esta razón se describen a continuación dos de los principales filtros analógicos y sus respectivas ecuaciones de diseño: Butterworth y Chevyshev.



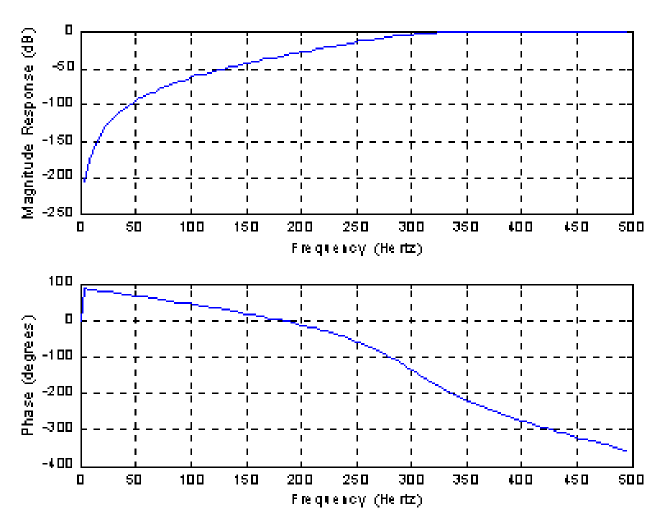
Filtros Butterworth

La característica principal de este filtro es la de poseer una respuesta plana en la banda de paso y una pendiente que depende del orden del filtro en la banda de rechazo, de tal forma que para aproximarse al filtro ideal es necesario incrementar el orden del filtro.



Filtros tipo Chebyshev

El filtro Chebyshev tipo I presenta ciertas variaciones en la banda de paso, denominadas rizo; el tipo II tiene rizo en la banda de rechazo y el elíptico tiene en ambas bandas. Sin embargo, para un determinado orden los filtros elípticos tienen la transición más pronunciada de todos los filtros.



Diseño de filtros tipo FIR

Para el diseño de filtros FIR se analiza el método de la transformada inversa de Fourier. La limitante de este método es que la transformada discreta de Fourier requiere el uso de una serie infinita de datos correspondientes a la respuesta al impulso del filtro ideal.