

# 6

## Capítulo

# Dinámica

---



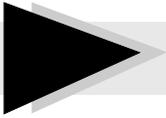
## Material Web

Sistema masa resorte amortiguador

2

Simulación de sistemas mecánicos

42



## 6.1 Sistema masa resorte amortiguador

LOS sistemas mecánicos masa resorte amortiguador constituyen una de las plantas de estudio más importantes en control automático, debido a los fenómenos físicos que poseen. Particularmente, la respuesta que generan del tipo vibratorio o movimiento oscilatorio, siendo fenómenos con periodicidad, es decir son esquemas de movimiento que se repiten una tras otra vez. Otra característica importante de estos sistemas es que las vibraciones que producen son del tipo sinusoidal que corresponden a la gran mayoría de las vibraciones en el mundo real, originadas por fuerzas restauradoras que son proporcionales a los desplazamientos respecto al punto de equilibrio. Virtualmente todo sistema en movimiento posee una capacidad de elasticidad, vibración y oscilación, estos fenómenos producen ruido y comportamiento indeseable.

El movimiento vibratorio también denominado vibración es la variación o cambio de configuración de la respuesta del sistema en torno a su posición de equilibrio estable. La característica principal de este movimiento es que es periódico siendo el más común el movimiento armónico simple (poseen una sola frecuencia y longitud de onda). Las vibraciones pueden ser de diversa naturaleza tales como: mecánicas, eléctricas, electromagnéticas, térmicas, etc. Los efectos que producen las vibraciones son indeseables ya que perturban el funcionamiento normal del sistema, producen resonancia, ruido y en general acortan la vida útil del sistema. Las ondas vibratorias transportan energía y cantidad de movimiento a través del espacio sin transportar materia, su velocidad depende de las características del medio.

Como un punto de referencia sobre la importancia de los fenómenos oscilatorios o vibratorios, en el ambiente industrial atañe a **normas de seguridad y salud**, este aspecto ya está legislado dentro de un marco jurídico. Por ejemplo, las siguientes normas industriales en ruido y vibraciones se pueden citar: NOM-001-STPS-2008, NOM-011-STPS-2001 y NOM-024-STPS-2001 (ver archivos anexos).

-  Dentro del contexto de **riesgos laborales** las vibraciones son aquellos fenómenos físicos generados por energía mecánica transmitidos al cuerpo humano capaces de producir efectos nocivos y daños a la salud.
-  La **peligrosidad** de las vibraciones está definida en función de su frecuencia, amplitud o magnitud, dirección de vibración y tiempo de exposición.
-  El cuerpo humano modifica su comportamiento cuando está sometido a una onda vibratoria que inclusive puede causarle resonancia la cual se define como un fenómeno oscilatorio que se produce

cuando un cuerpo capaz de vibrar es sometido a una fuerza periódica de vibración coincidente con el periodo de vibración característico de dicho cuerpo.

 Ante este fenómeno de resonancia es natural que el cuerpo humano tenga la capacidad de vibrar ya que disipa esta energía en forma de calor, de otra forma estaría expuesto a una fractura o lesión. Las molestias en el ser humano por estar sometido a una onda vibratoria van desde sensaciones de mareo, calambres, problemas en la columna vertebral, etc.

 Otro aspecto importante sobre la vibración es lo que sucede en los aparatos para ejercitar músculos, un mal uso por tiempo prolongado pueden provocar desprendimiento de retina o dañar sensiblemente el sistema visual.

Para llevar a cabo el análisis y estudio completo de la vibración de sistemas mecánicos se emplea el modelo de un bloque rígido de masa  $m$ , resorte y amortiguador, estos elementos representan la masa, elasticidad y fricción del sistema, respectivamente. La herramienta matemática fundamental de análisis para abordar este tipo de planteamiento lo constituye su modelo dinámico formado por una ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden, así como su correspondiente función de transferencia (control clásico).

Por todo lo anterior ya expresado, la importancia de estudiar en detalle un sistema masa resorte amortiguador es clave, así como contar con criterios para diseñar y seleccionar adecuadamente sus parámetros para un correcto desempeño.



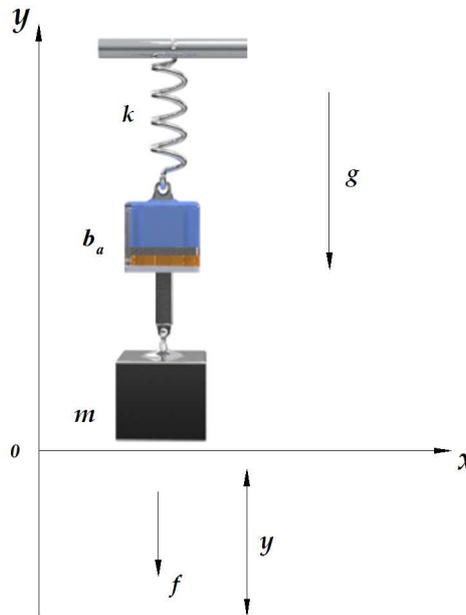
### 6.1.1 Modelo de segundo orden del sistema masa resorte amortiguador

El sistema masa resorte amortiguador se describe en la figura 6.1. Considere el caso donde este sistema se encuentra en la configuración vertical sometido a la acción de la gravedad, el sistema de referencia cartesiano se selecciona de tal forma que el desplazamiento vertical se mide en la dirección del eje  $y$ , despreciando componentes de movimiento en los ejes  $x$  y  $z$ .

El modelo dinámico del sistema masa resorte amortiguador en la configuración vertical tiene la siguiente forma:

$$f - mg = m\ddot{y} + b\dot{y} + ky \quad (6.1)$$

donde:



**Figura 6.1** Sistema masa resorte amortiguador.

- $m, b, k \in \mathbb{R}_+$  corresponden a la masa, fricción viscosa del amortiguador y constante de rigidez del resorte, respectivamente.
- $y$  es el desplazamiento del bloque de masa  $m$  en dirección del eje  $y$ .
- $\dot{y}$  es la velocidad de movimiento del bloque de masa  $m$  la cual depende de las características de viscosidad del amortiguador  $b$  y la rigidez del resorte  $k$ .
- $\ddot{y}$  es la aceleración que sufre la masa  $m$  debido a la fuerza aplicada  $f$ .
- Debido a que el sistema masa resorte amortiguador se encuentra en posición vertical bajo la influencia de la gravedad, entonces el peso ( $mg$ ) se considera como parte de los fenómenos físicos del sistema.

El modelo dinámico 6.6 es una ecuación diferencial lineal, por lo que puede ser convertido a una función de transferencia de la siguiente manera:

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k} = \frac{\frac{1}{m}}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}} = \frac{1}{k} \frac{\frac{k}{m}}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}} \quad (6.2)$$

$$= A \frac{w_n^2}{s^2 + 2\rho w_n s + w_n^2} \quad (6.3)$$

donde:  $u(s) = f(s) - \frac{mg}{s}$ ,  $A = \frac{1}{k}$ ,  $w_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ,  $2\rho w_n = \frac{b}{m} \Rightarrow \rho = \frac{b}{2\sqrt{mk}}$ .

El sistema masa resorte amortiguador tiene una correspondencia biunívoca entre los modelos dinámicos y función de transferencia que se puede expresar de la siguiente forma:

$$f - mg = m\ddot{y} + b\dot{y} + ky \quad \Longleftrightarrow \quad G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = A \frac{w_n^2}{s^2 + 2\rho w_n s + w_n^2}$$

Los parámetros  $w_n$  y  $\rho$  de la función de transferencia 6.3 tienen la siguiente interpretación:

-   $A$  representa el factor de ganancia de la función de transferencia.
-   $w_n$  es la frecuencia natural de oscilación.
-  El factor de amortiguamiento está representado por  $\rho$ , dependiendo del valor de este parámetro se pueden dar cuatro posibles casos:
  - Si la fricción no está presente, es decir el factor de amortiguamiento  $\rho = 0$ , entonces la respuesta de sistema oscilará permanentemente, con frecuencia de oscilación igual al valor de  $w_n$ . Observe que  $G(s)$  exhibirá una respuesta con amplitud unitaria.
  - Si  $\rho < 1$  se le conoce como sistema **subamortiguado**.
  - Si  $\rho = 1$  es denominado como sistema **críticamente amortiguado**.
  - Si  $\rho > 1$  corresponde al caso de **sobreamortiguado**.

En la descripción del sistema de segundo orden se emplean los siguientes conceptos que a continuación se describen:

-  **Período**  $T$  es el tiempo necesario para que la señal vibratoria se repita.
-  **Frecuencia**  $f_s$  es el número de ciclos por unidad de tiempo y es el inverso del periodo  $f_s = \frac{1}{T}$ .
-  **Frecuencia natural** es la frecuencia de un sistema que tiene vibración libre, es decir donde no interviene la fricción o algún elemento de amortiguamiento.
-  **Frecuencia natural amortiguada** es la frecuencia de oscilación de un sistema tomando en cuenta la fricción.

 **Resonancia** es un fenómeno que ocurre cuando la frecuencia de la fuerza de excitación es igual a la frecuencia natural, por lo que la amplitud del movimiento oscilatorio puede aumentar en forma indefinida, dependiendo sólo de la magnitud de fricción o amortiguamiento que se encuentre presente. El conocimiento de la frecuencia natural del sistema es un parámetro clave para evitar que la frecuencia de la señal de excitación externa coincida con dicho parámetro.

 **Vibración libre** es un movimiento periódico que el sistema presenta cuando se desplaza de su posición de equilibrio. Las fuerzas que se encuentran presentes son la fuerza del resorte, fricción y el peso de la masa. Esta respuesta se presenta en la fase transitoria y generalmente desaparece debido al fenómeno de fricción.

 **Vibración forzada** cuando actúan fuerzas externas sobre el sistema cuando éste se encuentra en movimiento vibratorio, la vibración resultante se denomina vibración forzada, en este modo el sistema tenderá a vibrar en su propia frecuencia natural, así como en la frecuencia de la fuerza de excitación.

 **Amortiguamiento** la gran mayoría de los sistemas contienen fenómenos de fricción (viscosa y de Coulomb) el cual es un fenómeno que se opone al movimiento del sistema, por lo que la velocidad disminuye y desaparecen gradualmente las oscilaciones.

- Cuando el amortiguamiento es fuerte, entonces el movimiento oscilatorio no estará presente, es decir las vibraciones mecánicas estarán ausentes. A este caso se dice que el sistema está **sobreamortiguado**.
- Si el amortiguamiento es muy débil, entonces habrá un número considerable de oscilaciones que se irán desvaneciendo paulatinamente con el tiempo, a este caso se le denomina **sistema subamortiguado**.
- Un **sistema críticamente amortiguado** su respuesta exhibirá muy pocas oscilaciones o vibraciones mecánicas entrando la respuesta del sistema a la fase estacionaria. Esta clase de comportamiento es un caso intermedio entre los dos casos anteriores.

Para diseñar sistemas mecánicos y algoritmos de control con alto desempeño es importante entender los aspectos analíticos y cualitativos de cada uno de los componentes mecánicos que lo conforman al sistema masa resorte amortiguador (elementos de inercia, rigidez y amortiguamiento). A continuación se describen los aspectos fundamentales de los efectos de inercia, rigidez y efectos disipativos.

**Inercia**

La física clásica o newtoniana establece que la inercia es una propiedad física asociada a la masa  $m$ , la cual describe el cambio de estado de movimiento. Un cuerpo permanece en reposo o conserva su movimiento rectilíneo uniforme cuando no actúa fuerzas sobre él, esta afirmación se describe en la primera ley de Newton, también conocida como ley de inercia:

**Ley de inercia**

Todo cuerpo conserva su estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme a menos que sea obligado a cambiar ese estado por alguna fuerza que se le aplique.

El movimiento de traslación de un cuerpo rígido de masa  $m$  se analiza a través de la trayectoria que describe el centroide o centro de masa. En este caso, la propiedad de inercia asociada al cuerpo rígido depende sólo de la masa total del cuerpo  $m$  y es independiente de como está distribuida esta masa sobre el cuerpo rígido. Por otro lado, la propiedad de inercia de un cuerpo rígido de masa  $m$  cuando se encuentra sujeto a movimiento rotacional influye notablemente la distribución de la masa sobre dicho cuerpo rígido, especialmente su momento de inercia  $I$  representa la distribución de la masa en el volumen que ocupa. Otro aspecto que es importante considerar para el caso del movimiento rotacional es que el momento de inercia depende con respecto a que eje de rotación está girando el cuerpo rígido.

**Elementos de inercia de la masa**

-  La masa y sus propiedades de inercia almacenan y liberan energía cinética y potencial.
-  Para el movimiento traslacional, la masa  $m$  es la que tiene influencia en la descripción de esta clase de movimiento.
-  Para el caso de movimiento rotacional, el momento de inercia  $I$  describe este tipo de movimiento.

Por notación considere que las variables  $x, y, z$  son coordenadas cartesianas que representan el desplazamiento de traslación lineal, entonces  $\mathbf{v} = \frac{d}{dt} [x \ y \ z]^T$  es la velocidad de movimiento lineal. Para el movimiento rotacional usaremos la notación  $q$  y por lo tanto la velocidad rotacional está expresada por medio de  $\frac{d}{dt}q = \dot{q}$ . La energía cinética será representada por el símbolo  $\mathcal{K}$  y la energía potencia por  $\mathcal{U}$ . En general, la energía cinética total  $\mathcal{K}(\mathbf{v}, \dot{q})$  de un cuerpo rígido de masa  $m$  depende de la velocidad lineal  $\mathbf{v}$ , velocidad rotacional

$\dot{q}$ . Es decir, tiene componentes debido al movimiento de traslación y rotación que se expresa de la siguiente forma:

$$\mathcal{K}(\mathbf{v}, \dot{q}) = \underbrace{\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2}_{\text{Traslación}} + \underbrace{\frac{1}{2}I\dot{q}^2}_{\text{Rotacional}}$$

donde  $\mathbf{v}^2$  representa la rapidez de la velocidad lineal  $\mathbf{v}$  y  $\dot{q}^2$  es la rapidez de velocidad rotacional.

### Fuerzas conservativas

Una fuerza conservativa no depende de la trayectoria que describe un cuerpo rígido para moverse del punto inicial al punto final. En otras palabras, el trabajo  $W$  hecho para mover a un cuerpo rígido del punto inicial al punto final depende únicamente de esas posiciones (inicial y final). En consecuencia, el trabajo realizado por una fuerza conservativa cuando un cuerpo describe una trayectoria cerrada es cero.

La fuerza elástica como la de un resorte es una fuerza conservativa, es decir el movimiento de un cuerpo dentro de una trayectoria cerrada (ida y vuelta) la energía cinética con la que salió es la misma al retornar. La fuerza de la gravedad es también conservativa, un experimento cotidiano es cuando arrojamamos verticalmente una piedra hacia arriba (despreciando la fricción del aire) regresará a nuestra mano con la misma cantidad de energía cinética que tenía cuando salió de ella.

Sin embargo, si en el cuerpo de masa  $m$  actúan varias fuerzas al regresar a su posición inicial con más o menos energía cinética que la que tenía inicialmente, en su trayectoria cerrada, ha cambiado su capacidad para hacer trabajo, entonces una de las fuerzas actuantes es no conservativa como el caso de la fricción.

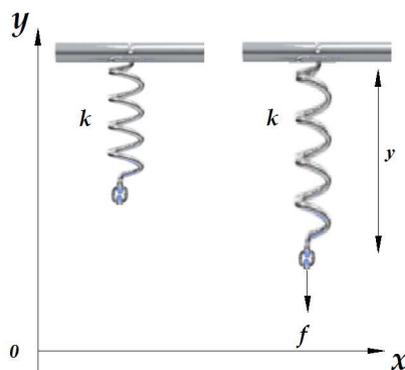
La energía cinética de un cuerpo de masa  $m$  se puede interpretar como su capacidad para hacer el trabajo en virtud de su movimiento.



#### 6.1.2 Elementos de rigidez

Cuando se aplica una fuerza  $f$  a un resorte lineal sobre una dirección específica (por ejemplo en la dirección del eje  $y$ ), esta fuerza produce una deflexión tal que:  $f(y) = ky$  como se ilustra en la figura 6.2, donde  $k$  se le denomina constante de rigidez la cual establece una relación lineal entre la fuerza y el desplazamiento.

Dada una fuerza  $f$ , entre más grande sea el valor de la constante de rigidez  $k$ , el desplazamiento o elongación  $y$



**Figura 6.2** Resorte  $k$  sometido a una fuerza  $f$  sobre la dirección del eje  $y$ .

será pequeño. Para aumentar el desplazamiento  $y$  se requiere aumentar la magnitud de la fuerza  $f$  o sustituir el elemento de rigidez por un resorte con una constante  $k$  más pequeña.

La energía potencial  $V(y)$  almacenada en el resorte se expresa como:

$$V(y) = \int_0^y f(y) dy = \int_0^y ky dy = k \frac{y^2}{2}$$

Cuando se aplica la fuerza  $f$  con determinada magnitud en dirección del eje  $y > 0$ , el resorte se expande o aumenta su elongación inicial, produciendo un desplazamiento en la dirección  $y > 0$ ; entonces el resorte  $k$  almacena energía potencial  $\mathcal{U}$ . Si la magnitud de la fuerza  $f$  es cero, entonces el resorte se comprime, invierte su movimiento debido a la fuerza restauradora del resorte retornando al origen (ley de Hooke:  $f_r = -ky$ ). Cuando se estira el resorte  $y > 0$ , la fuerza del resorte es negativa ( $f_r < 0$ ); cuando se comprime  $y < 0$ , entonces  $f_r > 0$ .



### Ley de Hooke

Los resorte obedecen a la ley de Hooke  $f_r = -ky$ , donde la constante  $k$  es denominada la rigidez del resorte y representa la magnitud de la fuerza por unidad de elongación, de esta forma un valor de  $k \gg 0$  representa un resorte muy duro o suficientemente rígido.

El sentido de la ley de Hooke es siempre opuesto al desplazamiento del extremo del resorte que se encuentra conectado al bloque de masa  $m$ .

La fuerza ejercida por el resorte es una fuerza restauradora en el sentido que siempre está dirigida hacia el origen.

### Elemento de rigidez

Los resortes mecánicos son elementos de rigidez los cuales almacenan y liberan energía potencial. Los elementos de rigidez se emplean para movimiento rotacional y traslacional.



#### 6.1.3 Elementos de rigidez en paralelo y en serie

Cuando dos resortes mecánicos lineales están conectados en paralelo o en serie la rigidez equivalente depende de la forma de conexión. Considere la configuración de resortes con constantes de rigidez  $k_1$  y  $k_2$  conectados en paralelo a un bloque rígido de masa  $m$  como se ilustra en la figura 6.3. Suponga que la fuerza  $f$  que se aplica sobre el bloque de masa  $m$  se encuentra dirigida en la dirección del eje  $y$ ; entonces el desplazamiento es igual para ambos resortes, debido a que el bloque de masa  $m$  se mueve únicamente sobre el eje  $y$ .

La fuerza total que experimentan los resortes en la pared del bloque de masa  $m$  corresponde a la suma de cada resorte, es decir:

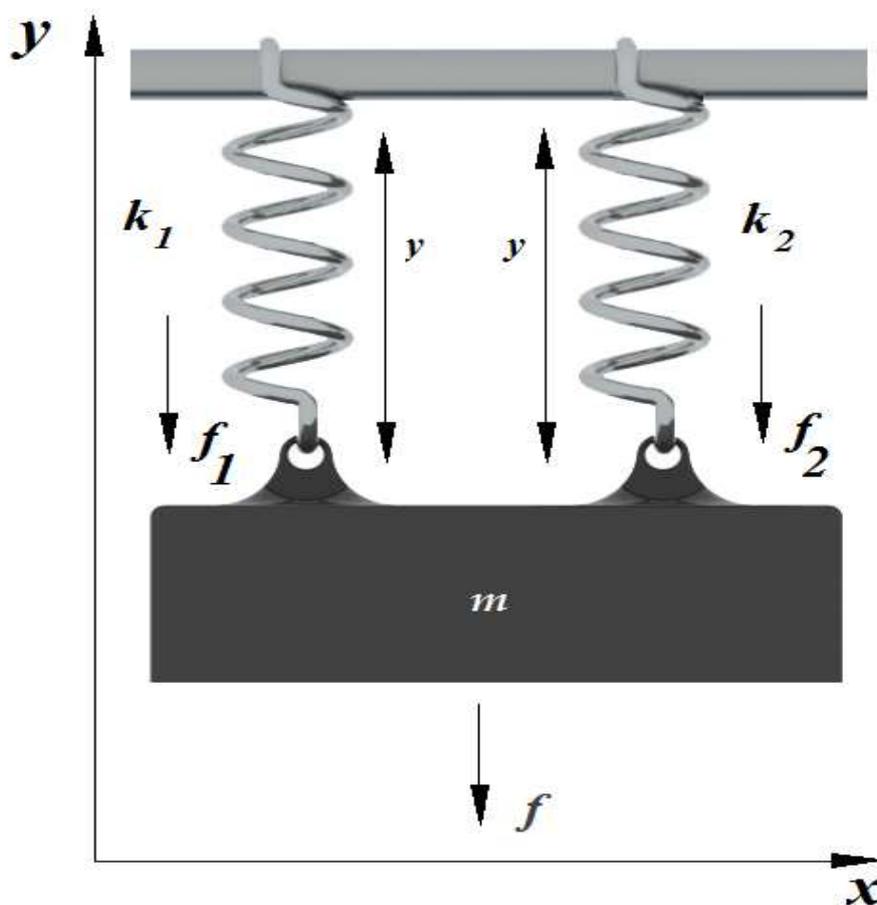
$$\begin{aligned} f(y) &= f_1(y) + f_2(y) \\ &= k_1 y + k_2 y \\ &= (k_1 + k_2) y \\ &= k_p y \end{aligned}$$

donde  $k_p = k_1 + k_2$  es la constante de rigidez equivalente para los dos resortes en paralelo.

Cuando  $n$  resortes se encuentran conectados en paralelo a un bloque de masa  $m$  el cual se le aplica una fuerza  $f$  en una dirección específica y el bloque se mueve paralelo a la posición inicial, entonces la constante equivalente de rigidez  $k_p$  está dada por la suma de todas las constantes de rigidez, es decir:

$$k_p = k_1 + k_2 + \cdots + k_n = \sum_{j=1}^n k_j$$

Considere el caso donde hay dos resortes  $k_1$  y  $k_2$  conectados en serie como se muestra en la figura 6.4 la fuerza  $f$  que actúa sobre cada resorte es la misma y el desplazamiento total de los resortes está dado por el

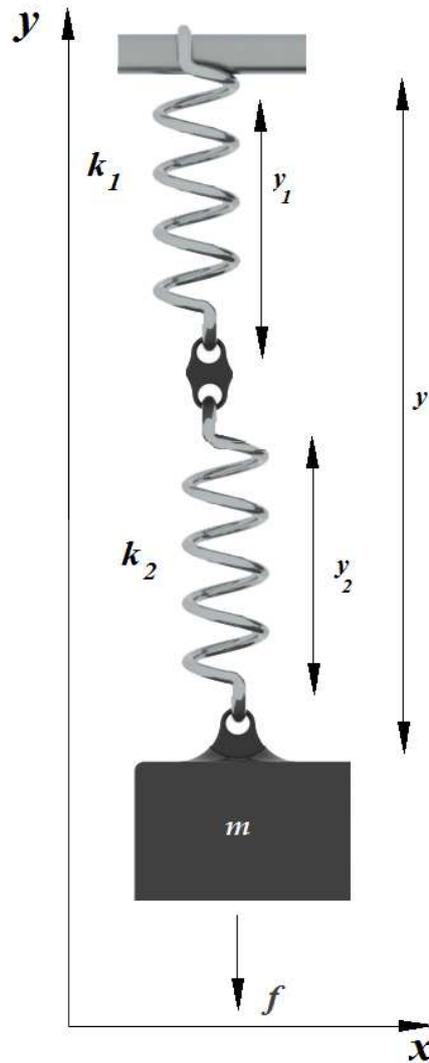


**Figura 6.3** Configuración de resortes en paralelo.

desplazamiento individual de cada resorte  $y = y_1 + y_2$ .

Por lo que se obtiene:

$$\begin{aligned}
 y &= y_1 + y_2 \\
 &= \frac{f}{k_1} + \frac{f}{k_2} \\
 &= \left[ \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right] f \\
 &= \frac{1}{k_s} f
 \end{aligned}$$



**Figura 6.4** Configuración de resortes en serie.

donde  $k_s$  es la rigidez equivalente de los dos resortes conectados serie:

$$\frac{1}{k_s} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \Rightarrow k_s = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

entonces la fuerza  $f$  adquiere la siguiente forma:

$$f = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} y = k_s y$$

En general, cuando  $n$  resortes se encuentran conectados en serie y el bloque de masa  $m$  tiene un desplazamiento paralelo a la fuerza  $f$  aplicada, la constante de rigidez  $k_s$  equivalente de los  $n$  resortes en serie se obtiene como:

$$k_s = \left[ \sum_{j=1}^n \frac{1}{k_j} \right]^{-1}$$



#### 6.1.4 Elemento de amortiguamiento

Los elementos de amortiguamiento no tienen inercia por lo que no pueden almacenar o liberar energía potencial, ni cinética, el movimiento mecánico aplicado a un amortiguador se convierte en calor (proceso térmico) o sonido y por lo tanto se les considera elementos mecánicos no conservativos o disipativos, es decir el amortiguador es un elemento de disipación que no puede recuperar la energía cinética y potencial.

Los elementos de amortiguamiento representan la fricción propia de todo sistema mecánico, en este caso la fricción natural de rozamiento del bloque de masa  $m$  con su entorno (fricción viscosa y Coulomb o fricción seca, ). Cuando la fricción del sistema masa resorte es muy pequeña y se requiere incrementarla, entonces se le acopla un amortiguador con una constante de amortiguamiento adecuada con la finalidad de generar el efecto de freno mecánico deseado, y de esta forma mejorar el desempeño del sistema.

La fricción es un fenómeno que se opone al movimiento por lo que la velocidad disminuirá y eventualmente desaparecerán las oscilaciones, si el amortiguamiento es fuerte, entonces el movimiento oscilatorio desaparecerá. Desde el punto de vista de la física, el trabajo realizado por la fricción es siempre negativo, por lo que la energía mecánica (cinética y potencial) disminuye.

Los elementos de amortiguamiento relacionan la fuerza aplicada con la velocidad de movimiento del sistema. Dentro de la clase de amortiguadores, los más empleados son los de tipo de fricción viscosa cuyo fenómeno se modela usando la ecuación  $f_{\text{viscosa}} = b\dot{y}$ , donde  $b$  es el coeficiente de fricción viscosa del medio de contacto y  $\dot{y}$  es la velocidad de movimiento. La forma de construcción es por medio de un pistón y un cilindro lleno de algún fluido (por ejemplo, aceite); este fluido resiste cualquier movimiento relativo entre la varilla del pistón y el cilindro, absorbiendo energía la cual se transforma a energía térmica, por lo que el amortiguador ni almacena energía cinética, ni potencial.

### Elemento de amortiguamiento

Los elementos de disipación o amortiguamiento se emplean para liberar energía cinemática del sistema, la transforman a energía térmica, por este motivo también se les denomina sistemas disipativos. El exceso de energía cinemática en el sistema produce sobre impulsos u oscilaciones, el elemento de amortiguamiento transforma este exceso de energía cinética a energía térmica, liberando o disminuyendo la energía del sistema, en otras palabras, el elemento de amortiguamiento absorbe las vibraciones y oscilaciones mediante efecto disipativo generando una acción de “freno mecánico” para mejorar el desempeño del sistema. Los elementos de amortiguamiento actúan con el movimiento rotacional y traslacional.



#### 6.1.5 Elementos de amortiguamiento en paralelo y en serie

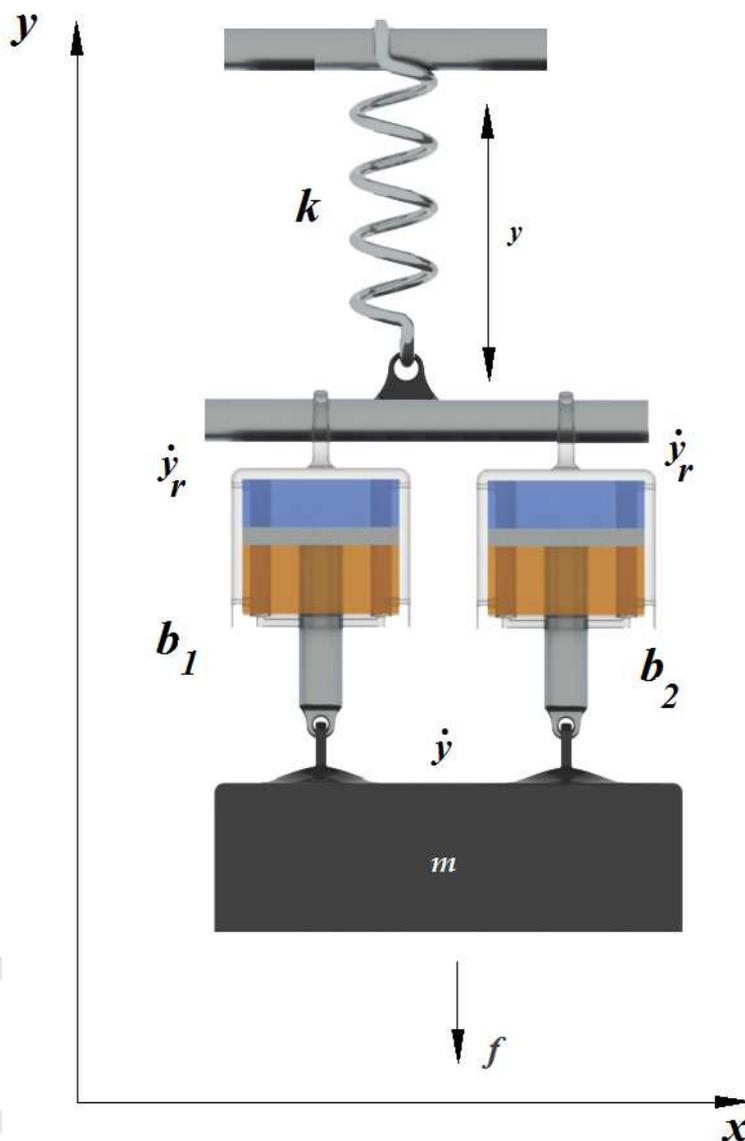
Considere dos amortiguadores con constantes de viscosidad  $b_1$  y  $b_2$  conectados en configuración paralela a un sistema masa resorte como se describe en la figura 6.5, la fuerza que ejerce el amortiguador  $b_1$  está dada por  $f_1 = b_1 (\dot{y} - \dot{y}_r)$ , donde  $\dot{y}$  es la velocidad de movimiento del bloque de masa  $m$  y  $\dot{y}_r$  es la velocidad que tiene en el punto de contacto del amortiguador  $b_1$  con el resorte  $k$ . Por otro lado, la fuerza que tiene el amortiguador  $b_2$  es  $f_2 = b_2 (\dot{y} - \dot{y}_r)$ ; la fuerza total está determinada por la suma de ambas fuerzas:  $f = f_1 + f_2$ . Es decir,

$$\begin{aligned} f_1 &= b_1 (\dot{y} - \dot{y}_r), & f_2 &= b_2 (\dot{y} - \dot{y}_r) \\ f &= f_1 + f_2 = b_1 (\dot{y} - \dot{y}_r) + b_2 (\dot{y} - \dot{y}_r) \\ &= [b_1 + b_2] (\dot{y} - \dot{y}_r) = b_p (\dot{y} - \dot{y}_r) \end{aligned}$$

donde  $b_p = b_1 + b_2$  es el coeficiente equivalente de los amortiguadores  $b_1$  y  $b_2$ .

Cuando  $n$  amortiguadores se encuentran conectados en paralelo a un bloque de masa  $m$  el cual se le aplica una fuerza  $f$  sobre un dirección determinada y el bloque de masa  $m$  se mueve paralelo a la posición inicial, entonces la constante equivalente de amortiguamiento  $b_p$  está dada por la suma de todas las constantes de amortiguamiento, es decir:

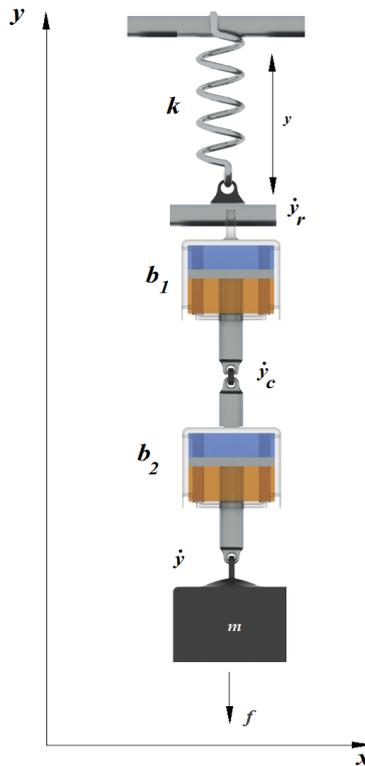
$$b_p = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = \sum_{j=1}^n b_j$$



**Figura 6.5** Configuración de amortiguadores en paralelo.

Ahora, considérese el caso de la figura 6.6 donde se ilustra la conexión en configuración serie entre dos amortiguadores  $b_1$  y  $b_2$  a un bloque de masa  $m$ ; para esta configuración la fuerza aplicada  $f$  es la misma para ambos amortiguadores, ya que se transfiere por el mismo eje de conexión que une los dos amortiguadores. Por lo que:  $f = b_1(\dot{y}_c - \dot{y}_r) = b_2(\dot{y} - \dot{y}_c)$ , siendo  $\dot{y}$  la velocidad de movimiento del bloque de masa  $m$ ,  $\dot{y}_c$  es la velocidad de movimiento en el punto de contacto de los dos amortiguadores y  $\dot{y}_r$  es la velocidad de

movimiento en el punto de contacto del amortiguador  $b_1$  con el resorte  $k$ .



**Figura 6.6** Configuración de amortiguadores en serie.

La fuerza  $f$  que se aplica es la misma para cada amortiguador:

$$f = b_1 (\dot{y}_c - \dot{y}_r) = b_2 (\dot{y} - \dot{y}_c)$$

combinando las anteriores expresiones se puede obtener para la velocidad  $\dot{y}_c$  del punto de contacto intermedio de ambos amortiguadores:

$$\dot{y}_c = \frac{b_1 \dot{y}_r + b_2 \dot{y}}{b_1 + b_2}$$

por lo que, se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} f &= b_2 (\dot{y} - \dot{y}_c) = b_2 \left( \dot{y} - \frac{b_1 \dot{y}_r + b_2 \dot{y}}{b_1 + b_2} \right) \\ &= b_2 \left( \frac{(b_1 + b_2) \dot{y} - b_1 \dot{y}_r - b_2 \dot{y}}{b_1 + b_2} \right) = b_2 \left( \frac{\cancel{b_1 \dot{y}} + \cancel{b_2 \dot{y}} - b_1 \dot{y}_r - \cancel{b_2 \dot{y}}}{b_1 + b_2} \right) \\ &= b_2 \left( \frac{b_1 \dot{y} - b_1 \dot{y}_r}{b_1 + b_2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{b_1 b_2}{b_1 + b_2} (\dot{y} - \dot{y}_r) \\
 &= b_s (\dot{y} - \dot{y}_r)
 \end{aligned}$$

donde  $b_s$  es el coeficiente equivalente de los dos amortiguadores  $b_1$  y  $b_2$  conectados en serie que satisface  $f = b_s (\dot{y} - \dot{y}_r)$ . La expresión para  $b_s$  está dada de la siguiente forma:

$$b_s = \frac{b_1 b_2}{b_1 + b_2} = \left[ \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} \right]^{-1}$$

En general, cuando  $n$  amortiguadores se encuentran conectados en serie y el bloque de masa  $m$  tiene un desplazamiento paralelo a la fuerza  $f$  aplicada, la constante de amortiguamiento  $b_s$  equivalente de los  $n$  amortiguadores en serie se obtiene como:

$$b_s = \left[ \sum_{j=1}^n \frac{1}{b_j} \right]^{-1}$$

## 6.2 Sistema masa resorte

EL sistema masa resorte es un caso especial del sistema general masa resorte amortiguador, donde el elemento de disipación no se considera. Este sistema es importante estudiarlo para entender los efectos físicos que suceden cuando hay ausencia de un amortiguador mecánico.

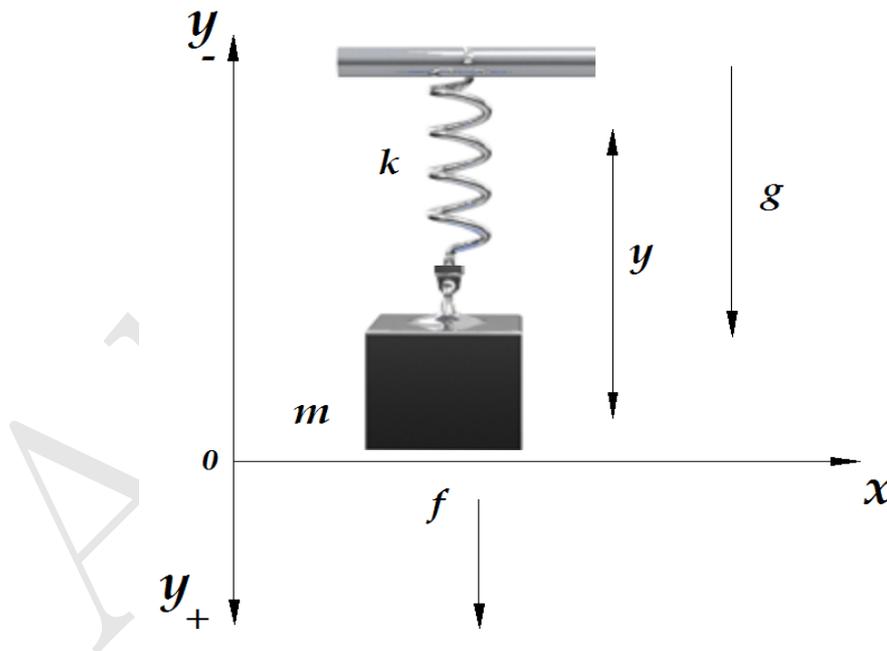
### Sistema masa resorte vertical

Considere la figura 6.7, sea un resorte con constante de rigidez  $k$  fijo colocado en forma vertical, donde uno de sus extremos está conectado a una barra rígida y el otro extremo conectado a un bloque rígido de masa  $m$ . Selecciónese como eje de desplazamiento vertical al eje  $y$ ; el origen es la intersección del eje  $y$  con el eje  $x$ , el cual se ubica en el punto de reposo del bloque de masa  $m$  y el resorte  $k$ . Supóngase también, que la masa del resorte  $k$  es muy pequeña en comparación de la masa  $m$ . Por lo tanto, se puede omitir la energía cinética del resorte de tal forma que toda la energía cinética  $\mathcal{K}$  se encuentra concentrada en la masa del bloque  $m$ .

Debe tomarse en cuenta que debido a que el sistema masa resorte se encuentra configurado en forma

vertical, todo el sistema está sujeto a la acción de la gravedad debido a la fuerza gravitacional del planeta, esto significa que el resorte sufre una elongación o desplazamiento hacia abajo por el peso del bloque  $mg$  (donde  $g = 9.81\text{m/seg}^2$  es la constante de aceleración de la gravedad). Es decir, en la posición inicial el resorte contiene cierto grado de elongación; para el caso donde sistema masa resorte se encuentra en forma horizontal, entonces no existe dicha elongación debido a que la energía potencial generada por la fuerza gravitacional es constante; generalmente para este caso se considera cero.

Un sistema de referencia cartesiano fijo denotado por  $\Sigma(x, y, z)$  se emplea para realizar las mediciones sobre el sistema masa resorte, el origen de  $\Sigma(x, y, z)$  se ubica en la posición de reposo de la masa  $m$ , como se indica en la figura 6.7, de tal forma que las coordenadas positivas  $y > 0$  se ubican en el sentido de la acción de la gravedad y por arriba de la posición cero son negativas ( $y < 0$ ). Debe considerarse que el eje  $z$  es perpendicular al plano  $x - y$ , es decir apunta hacia afuera de la página. Además, también considere que no existe movimiento sobre los ejes  $x, z$ ; el movimiento del sistema se realiza únicamente sobre el eje  $y$ , entonces la fuerza  $f$  proporciona un desplazamiento de la masa en la dirección positiva del eje  $y$ .



**Figura 6.7** Sistema masa resorte.

La mecánica analítica es como área de la física nos permite obtener la expresión que determina el modelo dinámico del sistema masa resorte. A continuación se describen los pasos necesarios para obtener dicho modelo dinámico utilizando las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange:

1). **Cinemática directa:**

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$$

se considera que el movimiento del sistema masa resorte es exclusivamente sobre el eje  $y$ . Por lo que las coordenadas  $x = z = 0$  m.

2). El modelo de **cinemática diferencial** se obtiene de la siguiente forma:

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{y} \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}^2 = \mathbf{v}^T \mathbf{v} = \dot{y}^2$$

3). **Modelo de energía:**

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(y, \dot{y}) &= \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 \\ \mathcal{U}(y) &= mgy \\ \mathcal{L}(y, \dot{y}) &= \frac{1}{2} m \dot{y}^2 - mgy \end{aligned}$$

donde  $\mathcal{K}(y, \dot{y})$  representa la energía cinética,  $\mathcal{U}(y)$  es la energía potencial (debido al campo conservativo de la fuerza gravitacional generado por el planeta),  $\mathcal{L}(y, \dot{y})$  es el lagrangiano.

4). **Ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange:**

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(y, \dot{y})}{\partial \dot{y}} \right] - \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(y, \dot{y})}{\partial y} \right] \\ \frac{\partial \mathcal{L}(y, \dot{y})}{\partial \dot{y}} &= \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \left[ \frac{1}{2} m \dot{y}^2 - mgy \right] = m\dot{y} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}(y, \dot{y})}{\partial \dot{y}} &= \frac{d}{dt} m\dot{y} = m\ddot{y} \\ -\frac{\partial \mathcal{L}(y, \dot{y})}{\partial y} &= -\frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{2} m \dot{y}^2 - mgy \right] = mg \end{aligned}$$

Hay que considerar el fenómeno de fricción propio del sistema masa resorte, todo sistema mecánico no está exento de este fenómeno natural. El hecho que el sistema masa resorte no incluya un amortiguador mecánico de ninguna manera significa que no tiene un fenómeno físico disipativo. La fricción viscosa se modela como:  $b\dot{y}$ , donde  $b$  es el coeficiente de fricción viscosa (por ejemplo debido al aire) del sistema masa resorte.

Por lo tanto, el modelo dinámico del sistema masa resorte está dado por:

$$= \underbrace{m\ddot{y}}_{\text{Fuerza inercial}} + \underbrace{b\dot{y}}_{\text{Fricción viscosa interna}} + \underbrace{ky}_{\text{Ley de Hooke}} + \underbrace{mg}_{\text{Fuerza gravitacional}}$$

La representación del modelo dinámico masa resorte en variables de estado:  $\mathbf{y} = [y_1 \ y_2]^T$ , con  $y = y_1$ ,  $\dot{y} = y_2$  puede ser expresada como la estructura de una ecuación diferencial de primer orden  $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y})$  de la siguiente manera:

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{y}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_2 \\ \frac{1}{m} [f - by_2 - ky_1 - mg] \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}(\mathbf{y})} \quad (6.4)$$

donde el vector de estados  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$  está formado por el desplazamiento de la posición  $y_1$  y la velocidad de movimiento  $y_2$ , es decir:  $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ .

### Simulación del sistema masa resorte

Ahora considere el estudio del sistema masa resorte por medio de herramientas de simulación en **MATLAB**, para tal efecto tome en cuenta los valores indicados en la tabla 6.1:

**Tabla 6.1 Parámetros del sistema masa resorte**

Parámetro	Valor
Masa $m$	5 kg
Coefficiente de fricción viscosa interno $b$	0.007 N-seg/m
Constante de rigidez $k$	6 N/m
Constante de la aceleración de la gravedad $g$	9.81 m/seg <sup>2</sup>

El proceso de simulación consiste en analizar la respuesta del sistema masa resorte cuando es sometido a una fuerza aplicada  $f$  con forma de pulso durante 10 segundos definidos para los siguientes intervalos:  $f = 0$  si  $t \in [0, 3)$ ;  $f = 1$  si  $t \in (3, 4)$ ;  $f = 0$  si  $t \in [4, 10]$ . Es decir:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, 3) \\ 1 & \text{si } t \in (3, 4) \\ 0 & \text{si } t \in [4, 10] \end{cases}$$

Se considera que la fuerza que ejerce la señal  $f$  sobre el sistema masa resorte se encuentra aplicada en forma vertical en la dirección positiva del eje  $y$ .

Para realizar la simulación del sistema masa resorte se requieren dos programas: el archivo `simu_smr.m` que hace el papel del programa principal y la función `smr.m` que es donde se encuentra implementado el modelo dinámico del sistema masa resorte. Es conveniente que para un correcto funcionamiento del proceso de simulación ambos programas se ubiquen en la misma carpeta o directorio del disco duro de su computadora personal.

El modelo dinámico del sistema masa resorte está implementado en la función `smr.m` que se presenta en el cuadro 6.1. Para propósitos de simulación considere los valores numéricos de los parámetros del sistema que se encuentran en la tabla 6.1. Es importante destacar que la magnitud del coeficiente de fricción viscosa (fenómeno físico natural) del sistema masa resorte es muy pequeño  $b = 0.007$  N-seg/m, por lo que se esperan efectos oscilatorios en la respuesta del sistema. El desplazamiento lineal del sistema mecánico está representado por la variable  $y_1$ . La velocidad de movimiento es  $y_2$ . El vector de estados  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$  tiene dos componentes  $y_1$  y  $y_2$  que se definen en las líneas 3 y 4, respectivamente. Observe que las líneas 19 y 21 corresponden a la ecuación del modelo dinámico (6.4), es decir la derivada de la variable de estado  $\dot{\mathbf{y}} = [y_2, \dot{y}_2]^T$ , debido a que la velocidad de movimiento es  $\dot{y}_1 = y_2$  y la aceleración se representa por  $\dot{y}_2 = \ddot{y}$ .

El programa principal que permite realizar la simulación del sistema está descrito por `simu_smr.m` (ver cuadro 6.2). Los parámetros de simulación se encuentran definidos en la línea 6 y el vector de tiempo se encuentra declarado en la línea 7; inicia desde  $t = 0$  segundos con incrementos de un milisegundo ( $h = 0.001$ ), hasta alcanzar el valor final de 10 segundos, es decir:  $t = t + h$ . Las condiciones iniciales de simulación son  $y_1(0) = 0$  (posición de reposo) y  $y_2(0) = 0$  como se especifica en la línea 8. La técnica de integración numérica empleada para resolver el modelo dinámico es el método de Runge-Kutta usando la función `ode45(...)` definida en la línea 11, previo al proceso de integración numérica en la línea 10 se realiza la configuración de parámetros para la función `ode45(...)` por medio de `odeset(...)` donde se ha especificado un error de integración numérico de una millonésima. El paso inicial y el máximo paso de integración está definido por  $h$ ; esto equivale a realizar una simulación discreta tal y como sucedería si los algoritmos se implementaran en un microprocesador.

El resultado de simulación se registra en la variable de estado y compuesta por dos columnas, cada columna tiene 10,000 renglones. La primera columna  $\mathbf{y}(:, 1)$  corresponde a los resultados del desplazamiento  $y_1(t)$  y la velocidad  $y_2(t)$  está contenida en la segunda columna  $\mathbf{y}(:, 2)$ . El tiempo en la variable  $\mathbf{t}$  es un vector columna con 10,000 renglones que almacenan valores dentro del intervalo  $t \in [0, 0.001, \dots, 10]$ . La componente de

desplazamiento lineal  $y_1$  se grafica en la línea 13 y la velocidad de movimiento  $y_2$  en la línea 14. Debido a que el desplazamiento de la masa  $m$  es hacia abajo (coordenadas positivas del eje  $y$ ), nótese en las líneas 13 y 14 se ha insertado un signo menos para graficar indicando el desplazamiento positivo hacia abajo.



### Código Fuente 6.1 smr

Mecatrónica. Control y Automatización.

Capítulo 6 Dinámica.

Fernando Reyes Cortés, Jaime Cid Monjaraz y Emilio Vargas Soto.

Alfaomega Grupo Editor: “Te acerca al conocimiento”.

---

Archivo smr.m

Versión de MATLAB 2012a

---

```

1 function yp =smr(t,y)
2     %vector de estados
3     y1=y(1);%posición articular  $y_1$ 
4     y2=y(2);%velocidad articular  $y_2 = \dot{y}$ 
5     %parámetros del sistema masa resorte
6     m=5;%masa
7     k=6;%constante de rigidez del resorte
8     b=0.007;%coeficiente de fricción viscosa interno o propio del sistema
9     g=9.81;%constante de aceleración debido a la gravedad)
10    if (t>=0) && (t<3)
11        | fuerza=0;%implementación de la la función pulso unitario de la fuerza aplicada  $f$ 
12    end
13    if (t>=3) && (t<4)
14        | fuerza=1;
15    end
16    if (t>=4) && (t<=10)
17        | fuerza=0;
18    end
19    y2p=(fuerza-b*y2-k*y1-m*g)/m;%aceleración del sistema masa resorte
20    yp=[y2;%vector de salida formado por: %velocidad de movimiento
21        y2p];% aceleración
22 end

```

---



### Código Fuente 6.2 `simu_smr`

Mecatrónica. Control y Automatización.

Capítulo 6 Dinámica.

Fernando Reyes Cortés, Jaime Cid Monjaraz y Emilio Vargas Soto.

Alfaomega Grupo Editor: “**Te acerca al conocimiento**”.

---

Archivo `simu_smr.m`

Versión de **MATLAB 2012a**

---

```

1 clc;
2 clear all;
3 close all;
4 format short
5 %parámetros de simulación
6 ti=0; h=0.001; tf = 10;
7 ts=ti:h:tf;% vector tiempo para simulación
8 ci=[0; 0];%condiciones iniciales  $y_1(0) = 0, y_2(0) = 0$ 
9 %configuración de la función de integración numérica ode45(...)
10 opciones=odeset('RelTol',0.001*h,'InitialStep', h, 'MaxStep',h);
11 [t, y]=ode45('smr',ts,ci,opciones);
12 %el signo menos en plot(t, -y(:,1)) indica que el desplazamiento positivo de  $y_1$  es hacia abajo
13 subplot(2,1,1);plot(t,-y(:,1))%grafica la posición  $y_1(t)$ 
14 subplot(2,1,2);plot(-y(:,1),y(:,2))%grafica la velocidad  $y_2(t) = \dot{y}$ 

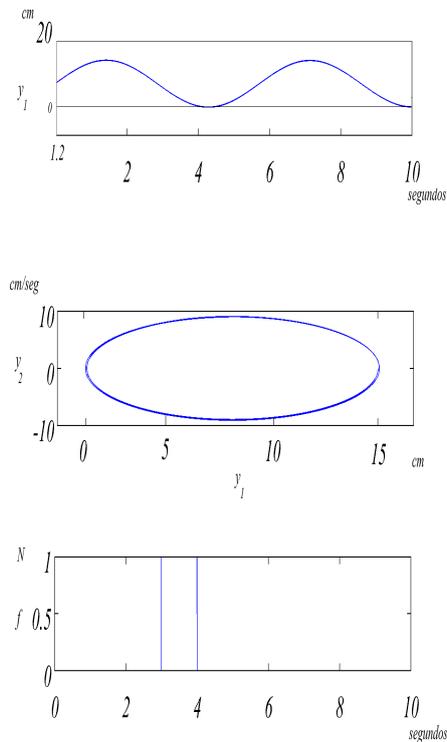
```

---

En la figura 6.8 se muestra la respuesta del sistema masa resorte para una fuerza aplicada en forma de pulso. La parte superior de esta figura corresponde al desplazamiento de la posición  $y_1$ ; observe que el sistema mantiene una oscilación permanente cuyos picos se encuentran entre 17 cm y 0 cm (posición de reposo). La explicación sobre el efecto de oscilación se deduce de lo siguiente: el polinomio característico del sistema es:  $p(s) = ms^2 + bs + k = 5s^2 + 0.007s + 6 = 0$ ; cuyos polos son complejos conjugados, característica inequívoca de una respuesta con transitorio oscilatoria. Los polos se ubican en:

$$\text{polos} = \begin{bmatrix} -0.0007 + -1.0954i \\ -0.0007 - 1.0954i \end{bmatrix}$$

La oscilación permanente se produce básicamente por que el sistema masa resorte no tiene un elemento amortiguador, y la fricción natural del sistema (debido al aire)  $b$  tiene una magnitud muy pequeña, es decir



**Figura 6.8** Respuesta oscilatoria de un sistema masa resorte.

no tiene un elemento que se oponga al movimiento. Además, la parte compleja de los polos predomina sobre la componente real ( $1.094 \gg |-0.0007|$ ), De ahí que el comportamiento en su respuesta corresponde al de un oscilador.

El polinomio característico del sistema masa resorte tiene la forma  $p(s) = s^2 + 2\rho w_n s + w_n^2$ , donde  $\rho \in \mathbb{R}_+$  es el factor de amortiguamiento,  $w_n \in \mathbb{R}_+$  es la frecuencia natural de oscilación. Por lo que,  $p(s) = s^2 + 2\rho w_n s + w_n^2 \Rightarrow p(s) = s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{m}{k} = s^2 + \frac{0.007}{5}s + \frac{6}{5}$ , entonces  $w_n^2 = \frac{6}{5} = 1.2 \text{ rad}^2/\text{seg}^2$ ; es decir:  $w_n = 1.095 \text{ rad/seg} \Rightarrow$  el periodo de oscilación del sistema masa resorte se obtiene de:  $T = \frac{2\pi}{w_n} = 5.78 \text{ segundos}$ , el cual corresponde al periodo de oscilación de la respuesta para  $y_1$  (ver gráfica superior de la figura 6.8).

Para obtener las raíces del polinomio  $p(s)$  se emplea la siguiente función:

roots(p)

En la ventana de comandos de **MATLAB** puede probar el siguiente código para  $p(s) = 5s^2 + 0.007s + 6$ :

```
fx >> p=[5, 0.007, 6]; ←
fx >> roots(p) ←
p=
    -0.0007 + 1.0954i
    -0.0007 - 1.0954i
```

### Nota

Para una correcta interpretación de resultados sobre la obtención de las raíces de  $p(s)$  debe tomarse en cuenta que la función `roots` obtiene las raíces del polinomio  $p$  considerado como polinomio mónico, es decir, el coeficiente de la potencia más alta de  $s$  es unitario, por lo que:  $p(s) = ms^2 + bs + k = 5s^2 + 0.007s + 6$  equivale a obtener los polos de:  $p(s) = s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m} = s^2 + \frac{0.007}{5}s + \frac{6}{5} = 0$ .

El diagrama fase confirma el comportamiento oscilatorio, la forma geométrica que describe corresponde a una trayectoria circular indicando el movimiento oscilatorio del desplazamiento de la posición  $y_1$ , así como de la velocidad  $y_2 = \dot{y}$ .

El comportamiento oscilatorio significa que el sistema se quedará permanentemente oscilando, la posición  $y_1(t)$  y  $y_2(t)$  tendrán componentes de funciones senoidales y la frecuencia de oscilación está definida por:  $w_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ .

La gráfica inferior de la figura 6.8 muestra la forma de pulso que tiene la fuerza aplicada  $f$ . Note que cuando la fuerza aplicada  $f = 0$  para el intervalo inicial  $0 < t < 3$  el sistema se encuentra oscilando. Esta característica se debe al peso del bloque cuya magnitud es  $mg = 49.05$  N. El lector puede comprobar que el comportamiento del sistema masa resorte cambia cuando la fuerza aplicada  $f$  tiene una mayor magnitud al peso del bloque (por ejemplo  $f = 120$  N).

En el intervalo  $3 \leq t < 4$  se aplica una fuerza unitaria  $f = 1$  N durante un segundo, la trayectoria del sistema no modifica su respuesta a pesar de la presencia de  $f$ , ya que representa el 2% del peso correspondiente del bloque y debido a que no existe un elemento de amortiguamiento en el sistema masa resorte y el fenómeno de fricción viscosa propio del sistema tiene muy leve oposición al movimiento, de tal forma que no es suficiente modificar su comportamiento oscilatorio. Para el intervalo  $4 \leq t \leq 10$   $f = 0$ , la respuesta  $y_1(t)$  permanece oscilando.

### Sistema masa resorte horizontal

Considere el caso donde el movimiento del sistema masa resorte es horizontal, tal y como se muestra en la figura 6.9. El movimiento del sistema se realiza sobre el eje  $x$ ; no se considera movimiento sobre los ejes  $y$ , ni  $z$ ; la fuerza aplicada  $f$  se ubica en dirección positiva del eje  $x$ , por lo que el movimiento del bloque  $m$  y la elongación del resorte de rigidez  $k$  se lleva a cabo exclusivamente sobre el eje  $x$ .

El origen del sistema de referencia cartesiano  $\Sigma(x, y, z)$  se encuentra como se ilustra en la figura 6.9, por lo que  $x = z = 0$  m y el sistema masa resorte se encuentra colocado una altura constante sobre el eje  $y$  denota por  $y^*$ .

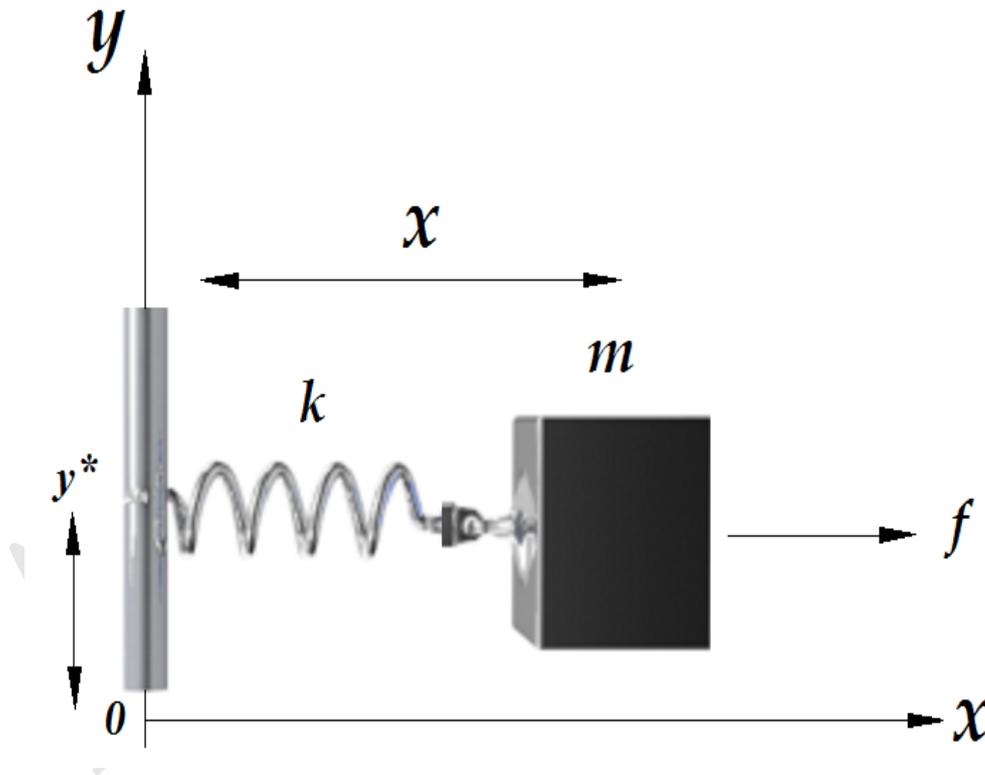


Figura 6.9 Sistema masa resorte horizontal.

Cuando un sistema masa resorte se mueve en un plano horizontal, la energía potencial es constante, por lo que no influirá el peso del bloque en el modelo dinámico como sucedió para el caso vertical.

El modelo dinámico para el sistema masa resorte en forma horizontal se obtiene mediante el siguiente procedimiento:

1). **Cinemática directa:**

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y^* \\ 0 \end{bmatrix}$$

se considera que el movimiento del sistema masa resorte es exclusivamente sobre el eje  $x$ . Por lo que las coordenadas  $y = z = 0$  m.

2). El modelo de **cinemática diferencial** se obtiene de la siguiente forma:

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}^2 = \mathbf{v}^T \mathbf{v} = \dot{x}^2$$

3). **Modelo de energía:**

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(x, \dot{x}) &= \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \\ \mathcal{U}(y) &= mgy^* \\ \mathcal{L}(x, \dot{x}) &= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - mgy^* \end{aligned}$$

donde  $\mathcal{K}(x, \dot{x})$  representa la energía cinética,  $\mathcal{U}(y)$  es la energía potencial (debido al campo conservativo de la fuerza gravitacional generado por el planeta),  $\mathcal{L}(x, \dot{x})$  es el lagrangiano.

4). **Ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange:**

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}} \right] - \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(x, \dot{x})}{\partial x} \right] \\ \frac{\partial \mathcal{L}(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}} &= \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left[ \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - mgy^* \right] = m\dot{x} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}} &= \frac{d}{dt} m\dot{x} = m\ddot{x} \\ -\frac{\partial \mathcal{L}(x, \dot{x})}{\partial x} &= -\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - mgy^* \right] = 0 \end{aligned}$$

Note ahora que el fenómeno de fricción propio del sistema masa resorte en forma horizontal no es con el aire como el caso vertical, en este modo horizontal existe contacto mecánico entre el desplazamiento del bloque y la superficie horizontal donde está instalado el sistema, por ejemplo una mesa. Por lo que se debe considerar estrictamente un valor diferente al caso del aire del coeficiente de fricción.

Para finalidades prácticas de la simulación del sistema masa resorte amortiguador, considere los valores numéricos que se presentan en la tabla 6.1. Evidentemente, la constante  $g = 9.81 \text{ m/seg}^2$  no es tomada en cuenta. También para propósitos de comparación con el modelo vertical se conservará el mismo valor numérico del coeficiente de fricción viscosa debido al aire (lo más adecuado es modificarlo con un valor más grande debido a la fricción que existe entre el bloque y la superficie de contacto).

El modelo dinámico del sistema masa resorte con movimiento horizontal se encuentra descrito en el archivo `smrh.m` (ver cuadro 6.3). Observe el cambio en la notación de las variables para referirse al movimiento horizontal. En las líneas 3 y 4 se definen las variables de estado para la posición y velocidad, respectivamente. En la línea 5 se declaran los parámetros que forman el sistema. La implementación de la función pulso se desarrolla en la línea 11. En la línea 19 se programa la aceleración y en la línea 20 se encuentra el vector de salida  $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}$ .

Para realizar la simulación se requiere del programa principal el cual se encuentra en el archivo `simu_smrh.m` descrito en la cuadro 6.4. Observe que en la línea 8 se programan las condiciones iniciales  $[x_1 \ x_2]^T = [0 \ 0]^T$ . En la línea 11 se realiza el proceso de integración numérica sobre el modelo dinámico del sistema masa resorte. En las líneas 12 y 13 se grafica el desplazamiento del bloque de masa  $m$  y en la línea ?? el diagrama fase del sistema (ver figura 6.10).

La figura 6.10 muestra la respuesta del sistema masa resorte amortiguador en forma horizontal cuando se le aplica una fuerza pulso. Observe que debido a que las condiciones iniciales son cero para la posición  $x_1$  como para la velocidad de movimiento  $x_2$ , durante el primer intervalo de tiempo  $t \in [0, 3)$  el sistema se mantiene en su punto de equilibrio, puesto que no hay excitación. Para el intervalo  $t \in [3, 4)$  se le aplica un pulso unitario, suficiente para exhibir el comportamiento oscilatorio del sistema, observe que en el diagrama fase (gráfica inferior de la figura 6.10), la trayectoria inicia desde el punto de equilibrio y converge posteriormente a un ciclo límite, permaneciendo oscilando de manera indefinida. A pesar que en el intervalo  $t \in [4, 10]$  la fuerza  $f = 0 \text{ N}$ , el comportamiento oscilatorio continúa debido precisamente a la naturaleza oscilatoria del sistema.

### 📌 Código Fuente 6.3 smrh

Mecatrónica. Control y Automatización.

Capítulo 6 Dinámica.

Fernando Reyes Cortés, Jaime Cid Monjaraz y Emilio Vargas Soto.

Alfaomega Grupo Editor: “Te acerca al conocimiento”.

---

Archivo smrh.m

Versión de MATLAB 2012a

---

```

1 function xp =smrh(t,x)
2     %vector de estados
3     x1=x(1); % posición articular
4     x2=x(2); %velocidad articular
5     %parámetros del sistema masa resorte
6     m=5; %masa
7     k=6; %constante de rigidez del resorte
8     b=0.007; %coeficiente de fricción viscosa propio o interno del sistema
9     %implementación de la la función pulso unitario de la fuerza aplicada f
10    if (t>=0) && (t<3)
11        | fuerza=0; %implementación de la la función pulso unitario de la fuerza aplicada f
12    end
13    if (t>=3) && (t<4)
14        | fuerza=1;
15    end
16    if (t>=4) && (t<=10)
17        | fuerza=0;
18    end
19    x2p=(fuerza-b*x2-k*x1)/m; %aceleración del sistema masa resorte
20    xp=[x2; %vector de salida formado por: velocidad de movimiento
21        x2p]; %aceleración
22 end

```

### ▲ Código Fuente 6.4 `simu_smrh`

Mecatrónica. Control y Automatización.

Capítulo 6 Dinámica.

Fernando Reyes Cortés, Jaime Cid Monjaraz y Emilio Vargas Soto.

Alfaomega Grupo Editor: “Te acerca al conocimiento”.

---

Archivo `simu_smrh.m`

Versión de **MATLAB 2012a**

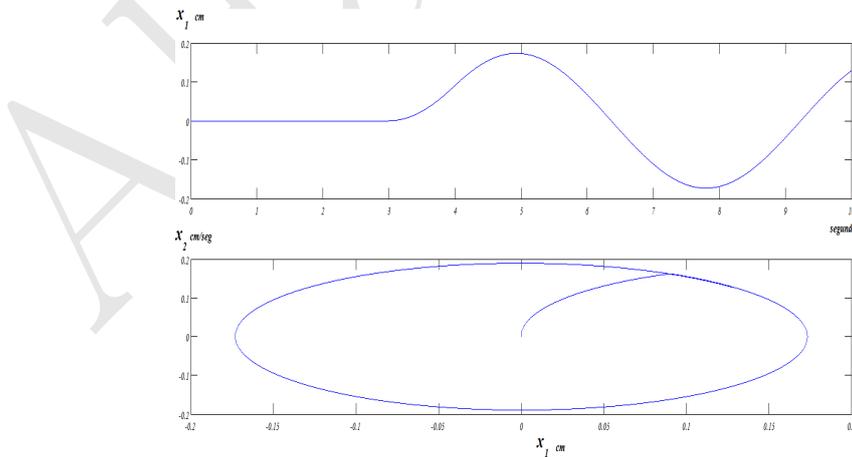
---

```

1 clc;
2 clear all;
3 close all;
4 format short
5 %parámetros de simulación
6 ti=0; h=0.001; tf = 10;
7 ts=ti:h:tf;% vector tiempo para simulación
8 ci=[0; 0]; %condiciones iniciales x1(0)=0, x2(0)=0
9 %configuración de la función de integración numérica ode45(...)
10 opciones=odeset('RelTol',0.001*h,'InitialStep', h, 'MaxStep',h);
11 [t, x]=ode45('smrh',ts,ci,opciones); %
12 subplot(2,1,1);plot(t,x(:,1))%grafica la posición x1(t)
13 subplot(2,1,2);plot(x(:,1),x(:,2))%grafica la velocidad x2(t)

```

---

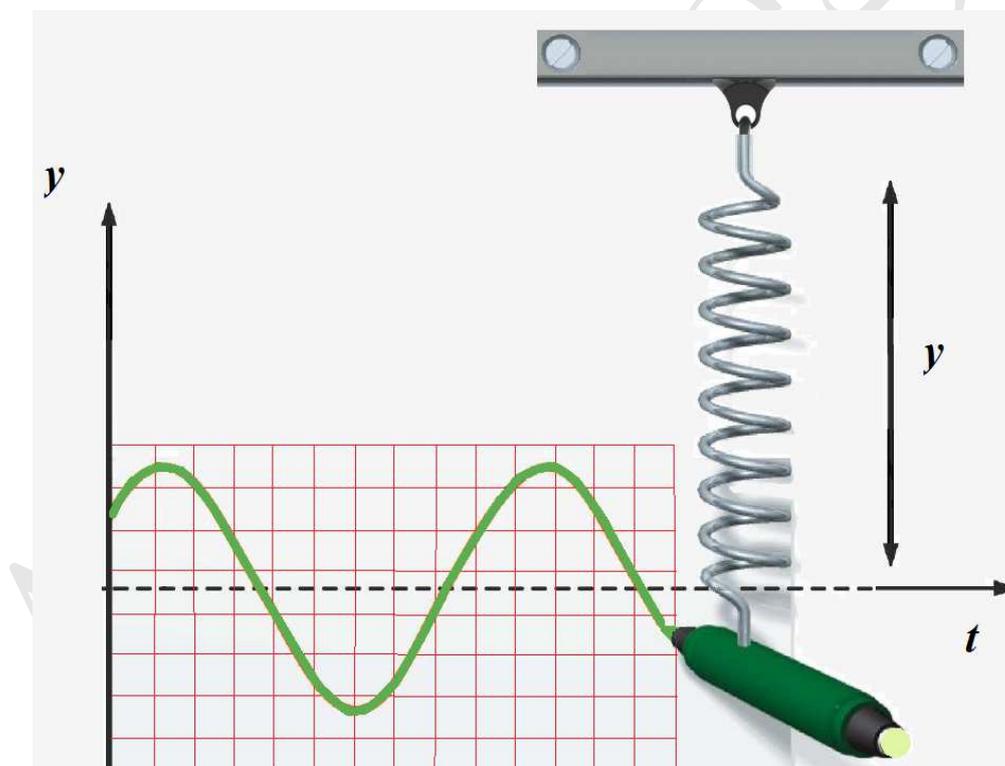


**Figura 6.10** Respuesta de un sistema masa resorte horizontal.

**Instrumento sísmico**

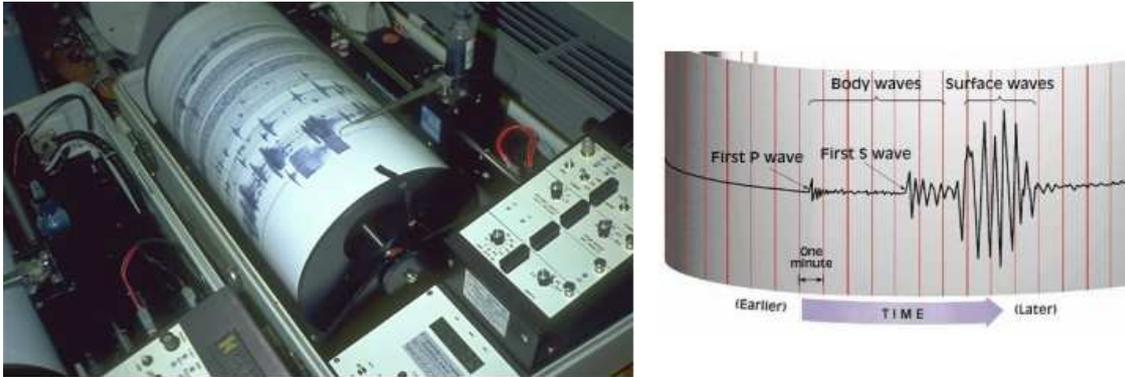
Como una aplicación directa del sistema masa resorte se encuentra en los instrumentos sísmicos utilizados para medir la respuesta oscilatoria (frecuencia y amplitud) de los movimientos telúricos. Estos sistemas se componen de un bloque de masa  $m$  (generalmente es una plumilla) acoplado mecánicamente a un resorte de rigidez  $k$  como el sismógrafo que se muestra en la figura 6.8.

Los sismógrafos actuales tienen el principio de funcionalidad en el sistema masa resorte, pero incorporan otros elementos mecánicos para medir la torsión y sensores de medición tales como acelerómetros y vibrómetros. El más utilizado es el medidor de Richter el cual la amplitud se mide sobre una escala logarítmica (ver figura 6.12).



**Figura 6.11** Medición de vibración oscilatoria (amplitud y frecuencia) de temblores o movimientos telúricos.

En todo sistema mecánico es adecuado que el efecto natural de fricción viscosa tenga una magnitud pequeña en comparación con los demás efectos físicos, de tal forma que la incorporación de un dispositivo amortiguador ayude a reducir o eliminar los sobre-impulsos, vibraciones y oscilaciones.



**Figura 6.12** Instrumento de medición sísmico.

Ahora considere el sistema masa resorte el cual se le ha acondicionado un elemento mecánico tipo amortiguador.

### 6.3 Sistema masa resorte amortiguador

SEA el sistema masa resorte amortiguador que se muestra en la figura 6.13, considere el caso vertical donde se encuentra un resorte de rigidez  $k$  acoplado a una barra metálica, el otro extremo del resorte a un amortiguador con coeficiente de fricción viscosa  $b_a$  el cual se encuentra unido mecánicamente a un bloque rígido de masa  $m$ . También se considera que para el resorte  $k$  como en el amortiguador  $b_a$  sus respectivas masas son muy pequeñas en comparación con la masa  $m$  del bloque rígido.

La obtención del modelo dinámico del sistema masa resorte amortiguador vertical es análogo al desarrollado en la sección 6.2, con la diferencia de que ahora se incorpora el efecto disipativo  $b_a$  del amortiguador como se ilustra en la siguiente ecuación diferencial:

$$\begin{aligned}
 f = & \underbrace{m\ddot{y}}_{\text{Fuerza inercial}} + \underbrace{b\dot{y}}_{\text{Fricción viscosa interna}} + \underbrace{b_a\dot{y}}_{\text{Fricción viscosa del amortiguador}} \\
 & + \underbrace{ky}_{\text{Ley de Hooke}} + \underbrace{mg}_{\text{Fuerza gravitacional}}
 \end{aligned}$$

La fricción viscosa del amortiguador se puede agrupar con el fenómeno de fricción interno del sistema

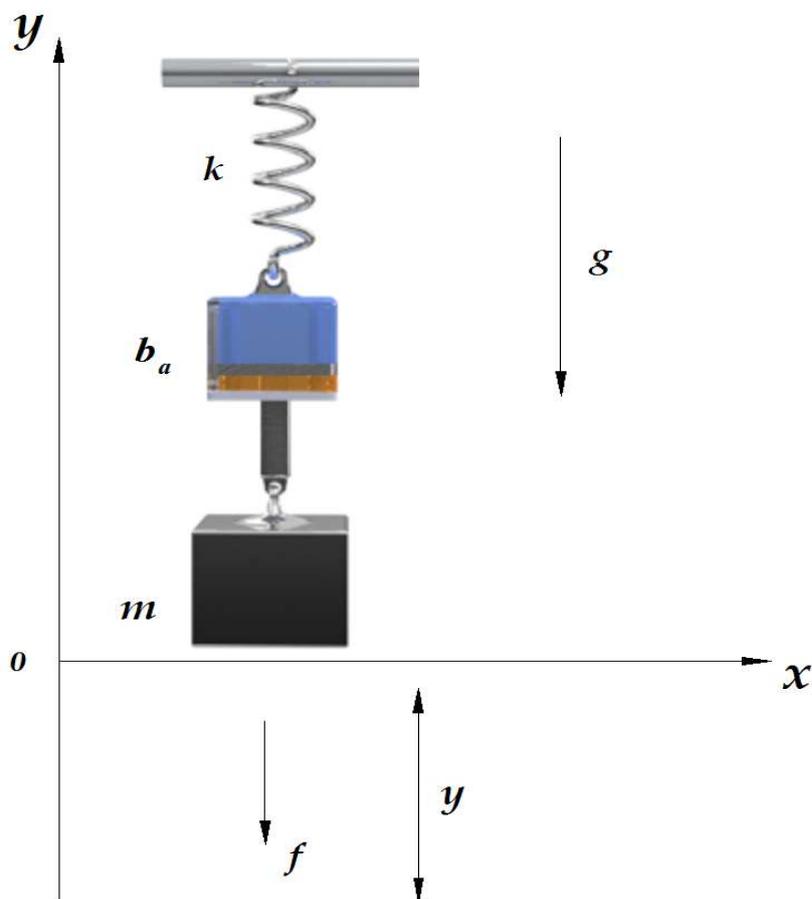


Figura 6.13 Sistema masa resorte amortiguador.

obteniendo la siguiente ecuación:

$$f = \underbrace{m\ddot{y}}_{\text{Fuerza inercial}} + \underbrace{(b + b_a)\dot{y}}_{\text{Fricción viscosa total}} + \underbrace{ky}_{\text{Ley de Hooke}} + \underbrace{mg}_{\text{Fuerza gravitacional}}$$

La representación del modelo dinámico masa resorte amortiguador en variables de estado  $\mathbf{y} = [y_1 \ y_2]^T \in \mathbb{R}^2$ , donde  $y_1$  es el desplazamiento del sistema y la velocidad de movimiento denotada por  $\dot{y} = y_2$  puede ser expresada como una ecuación diferencial de primer orden  $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y})$  de la siguiente manera:

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_2 \\ \frac{1}{m} [f - (b + b_a)y_2 - ky_1 - mg] \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}(\mathbf{y})} \quad (6.5)$$

Observe que el modelo dinámico del sistema masa resorte amortiguador incluye los fenómenos de fricción viscosa: el interno del sistema  $b\dot{y}$  más el fenómeno disipativo del elemento amortiguador  $b_a\dot{y}$ , los cuales puede aparecer como la suma de ambos fenómenos  $(b + b_a)\dot{y}$ .



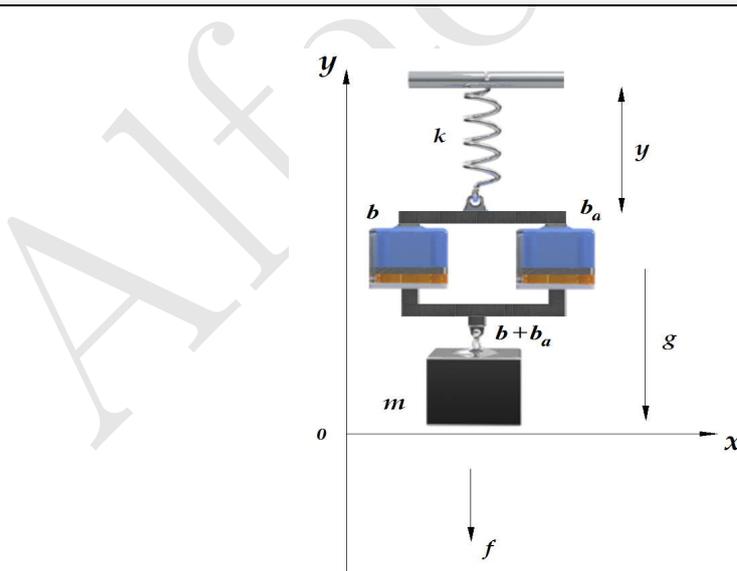
Todo sistema mecánico tiene una determinada magnitud de fricción interna o propia  $b\dot{y}$ .



Cuando se inserta un elemento mecánico disipativo  $b_a$  al sistema, se incrementa el fenómeno disipativo de dicho sistema, obteniendo como coeficiente de fricción total:  $b + b_a$ . Esto equivale a tener dos amortiguadores en paralelo como se muestra en la figura 6.14.



Es importante remarcar que la contribución del efecto disipativo  $b_a$  en el sistema masa resorte amortiguador será un parámetro clave de diseño, para tal efecto es conveniente que el coeficiente de fricción propio del sistema  $b$  sea de magnitud pequeña, para tener mayor margen de diseño en el valor del coeficiente de amortiguamiento  $b_a$ ; de otra manera la contribución de  $b_a$  en  $b + b_a$  será irrelevante, ya que si  $b \gg b_a$  el rango de valores para  $b_a$  será reducido. Esto significa que por diseño el coeficiente  $b$  del fenómeno de fricción interno del sistema masa resorte es grande en su construcción mecánica, teniendo como consecuencia pobre desempeño y en este caso no tendría sentido incluir un elemento de amortiguamiento  $b_a$ .



**Figura 6.14** El amortiguador  $b_a$  contribuye en forma paralela con el fenómeno propio de fricción  $b$ .

### Simulación del sistema masa resorte amortiguador vertical

El proceso de simulación propuesto en esta sección tiene la finalidad de realizar un análisis comparativo de funcionamiento cuando al sistema masa resorte vertical se le incluye un amortiguador  $b_a$ . Se tomará como hipótesis que el coeficiente de fricción viscosa interno del sistema es pequeño, por ejemplo como el indicado en la tabla 6.1 que se presenta en la tabla 6.2 incorporando el valor del coeficiente de fricción viscosa del amortiguador.

**Tabla 6.2 Parámetros del sistema masa resorte amortiguador**

Parámetro	Valor
Masa $m$	5 kg
Coficiente de fricción viscosa interno $b$	0.007 N-seg/m
Coficiente de fricción viscosa del amortiguador $b_a$	3.5 N-seg/m
Constante de rigidez $k$	6 N/m
Constante de la aceleración de la gravedad $g$	9.81 m/seg <sup>2</sup>

La simulación se realiza de manera similar al descrito al caso del sistema masa resorte (ver página 20). Es decir se emplea la misma forma de la fuerza aplicada  $f$ , tiempo de simulación a  $t \in [0, 0.001, \dots, 10]$ . En el cuadro 6.5 se encuentra el programa `smra.m` con la implementación del modelo dinámico del sistema masa resorte amortiguador en forma vertical. Observe que en la línea 23 se toma en cuenta la contribución del amortiguador incluido  $b_a$  con el fenómeno de fricción interno del sistema, esto equivale a tener un sólo amortiguador en paralelo con las contribuciones  $b_a + b$ .

El programa principal que permite realizar el proceso de simulación del sistema masa resorte amortiguador configurado en forma vertical se encuentra descrito en el cuadro 6.6 (ver archivo `simu_smra.m`). Los resultados se presentan en la figura 6.15, la gráfica superior representa el desplazamiento que tiene el sistema masa resorte amortiguador y la gráfica inferior corresponde a la descripción del diagrama fase. Observe como el efecto de amortiguamiento evita que el sistema entre en estado oscilatorio; a pesar que las condiciones iniciales del sistema  $\mathbf{y} = [y_1 \ y_2]^T = [0 \ 0]^T$  el peso ( $mg$ ) activa de manera inmediata la respuesta del sistema  $y_1$ , cuando la fuerza  $f = 0$  para  $t \geq 4$  segundos, se desvanece la fuerza aplicada, el sistema entra en estado estacionario alcanzando una elongación de 8.5 cm debido al peso del bloque a diferencia del caso donde no existe amortiguador  $b_a$ , el sistema quedaría oscilando (ver figura 6.8). Efectivamente, el elemento amortiguador  $b_a \gg b$  es 500 veces mayor al coeficiente de fricción viscosa  $b$  interno del sistema, por lo que el efecto de freno mecánico mejora la respuesta del sistema.

### ▲ Código Fuente 6.5 smra

Mecatrónica. Control y Automatización.

Capítulo 6 Dinámica.

Fernando Reyes Cortés, Jaime Cid Monjaraz y Emilio Vargas Soto.

Alfaomega Grupo Editor: “Te acerca al conocimiento”.

---

Archivo smra.m

Versión de MATLAB 2012a

---

```

1 function yp =smra(t,y)
2     %vector de estados
3     y1=y(1);% posición articular
4     y2=y(2);%velocidad articular
5     %parámetros del sistema masa resorte amortiguador
6     m=5;%masa
7     k=6;%constante de rigidez del resorte
8     b=0.007;%coeficiente de fricción viscosa interno o propio del sistema
9     ba=3.5;%elemento de amortiguamiento
10    g=9.81;%constante de aceleración debido a la gravedad
11    %implementación de la la función pulso unitario de la fuerza aplicada f
12    if (t>=0) && (t<3)
13        | fuerza=0;%implementación de la la función pulso unitario de la fuerza aplicada f
14    end
15    if (t>=3) && (t<4)
16        | fuerza=1;
17    end
18    if (t>=4) && (t<=10)
19        | fuerza=0;
20    end
21    %la incorporación del amortiguador  $b_a$  al sistema masa resorte puede ser visto como una
22    %contribución en paralelo con el fenómeno de fricción interno  $b$ , es decir  $b + b_a$ 
23    y2p=(fuerza-(b+ba)*y2-k*y1-m*g)/m;%aceleración del sistema masa resorte
24    yp=[y2;%vector de salida formado por: velocidad de movimiento
25        y2p];%aceleración
26 end

```

---

### ▲ Código Fuente 6.6 simu\_smra

Mecatrónica. Control y Automatización.

Capítulo 6 Dinámica.

Fernando Reyes Cortés, Jaime Cid Monjaraz y Emilio Vargas Soto.

Alfaomega Grupo Editor: “Te acerca al conocimiento”.

---

Archivo simu\_smra.m

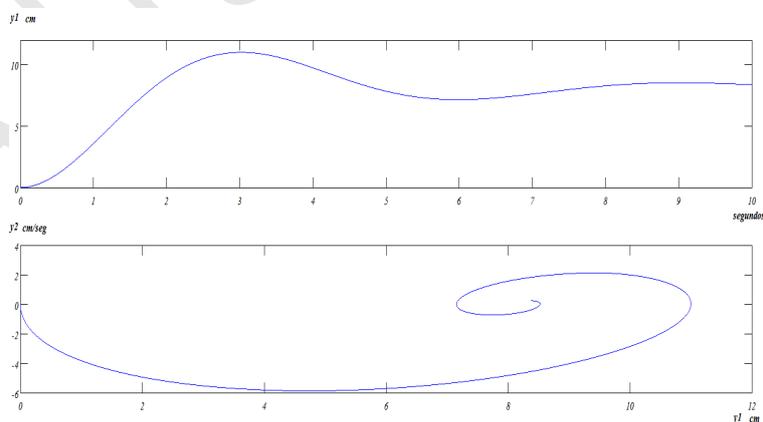
Versión de **MATLAB** 2012a

---

```

1 clc;
2 clear all;
3 close all;
4 format short
5 %parámetros de simulación
6 ti=0; h=0.001; tf = 10;
7 ts=ti:h:tf; % vector tiempo para simulación
8 ci=[0; 0]; %condiciones iniciales y1(0)=0, y2(0)=0
9 %configuración de la función de integración numérica ode45(...)
10 opciones=odeset('RelTol',0.001*h,'InitialStep', h, 'MaxStep',h);
11 [t, y]=ode45('smra',ts,ci,opciones);
12 %el signo menos en plot(t,-y(:,1)) indica que el desplazamiento positivo de y1 es hacia abajo
13 subplot(2,1,1);plot(t,-y(:,1))%grafica la posición y1(t)
14 subplot(2,1,2);plot(-y(:,1),y(:,2))%grafica la velocidad y2(t)

```



**Figura 6.15** Respuesta de un sistema masa resorte vertical.

### Simulación del sistema masa resorte amortiguador horizontal

Para realizar la simulación del sistema masa resorte más el efecto de un elemento amortiguador en la configuración mecánica horizontal se toma como base la figura 6.9. El desplazamiento del sistema masa resorte amortiguador es exclusivamente en la dirección del eje  $x$ , así como la fuerza aplicada  $f$ . En este caso la energía potencial  $\mathcal{U}$  es constante y por lo tanto no está presente el peso del bloque rígido de masa  $m$ . El siguiente modelo dinámico se obtiene con el procedimiento de Euler-Lagrange:

$$f = \underbrace{m\ddot{x}}_{\text{Fuerza inercial}} + \underbrace{(b + b_a)\dot{x}}_{\text{Fricción viscosa total}} + \underbrace{kx}_{\text{Ley de Hooke}}$$

La representación del modelo dinámico masa resorte amortiguador en variables de estado  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2]^T \in \mathbb{R}^2$ , donde  $x_1$  es el desplazamiento del sistema y la velocidad de movimiento denotada por  $\dot{x} = x_2$ . El modelo dinámico tiene una estructura de una ecuación diferencial de segundo orden que puede ser convertida a primer orden  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  de la siguiente forma:

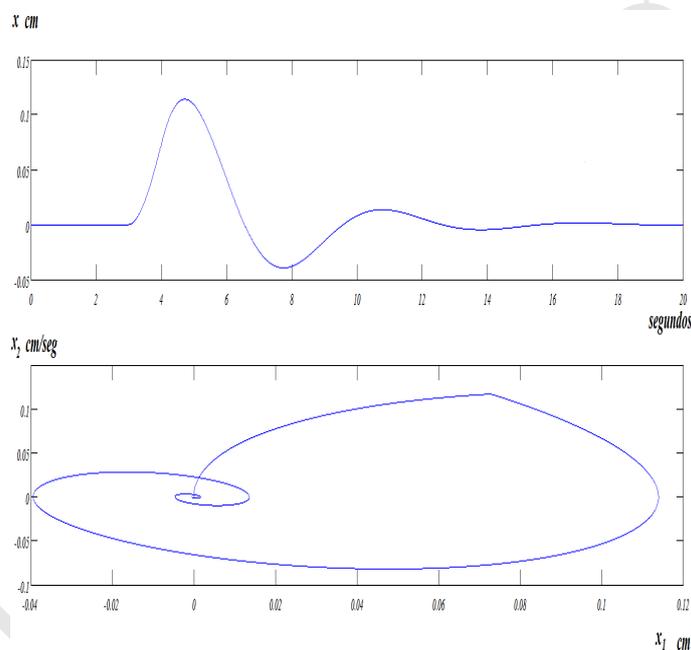
$$\underbrace{\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{1}{m} [f - (b + b_a)x_2 - kx_1] \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}(\mathbf{x})} \quad (6.6)$$

Como en el caso vertical, en el movimiento horizontal el coeficiente de la fricción viscosa del amortiguador  $b_a$  se puede agrupar con el coeficiente de fricción interno del sistema, obteniendo un coeficiente total  $b + b_a$ .

El proceso de simulación se basa en considerar condiciones iniciales cero:  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2]^T = [0 \ 0]^T$ , la fuerza aplicada  $f$  sobre el eje  $x$  es la considerada anteriormente con la diferencia de que el tiempo de simulación será considerado como  $t = 20$  seg,  $t \in [0, 0.001, \dots, 20]$ ; lo anterior tiene la finalidad de extender la región del estado estacionario. Los valores de los parámetros son los que se presentan en la tabla 6.2 (la constante de aceleración  $g$  no se toma en cuenta). El programa `smrah.m` descrito en el cuadro 6.7 contiene la implementación del modelo dinámico del sistema masa resorte amortiguador en forma horizontal. Sin embargo, el proceso de simulación sólo puede ser realizado por medio del programa `simu_smrah.m` que se ilustra en el cuadro 6.8.

Los resultados de simulación se ilustran en la figura 6.16. Observe que para el intervalo de tiempo  $t \in [0, 3]$  segundos, la respuesta de sistema  $x_1(t) = 0$ , debido a las condiciones iniciales  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2]^T = [0 \ 0]^T$ , en el caso horizontal no existe la influencia del peso ( $mg$ ) del bloque rígido. Para el intervalo  $t \in [3, 4]$  segundos, la

fuerza aplicada toma la forma de un pulso unitario, y la respuesta del sistema presenta pequeñas oscilaciones con un pequeño pico de 0.18 cm que se desvanece paulatinamente debido al efecto del elemento amortiguador  $b_a$ . Para  $t \geq 14$  segundos,  $x_1(t)$  inicia el estado estacionario permaneciendo  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  en el punto de equilibrio. El efecto de amortiguamiento del dispositivo mecánico  $b_a$  mejora sustancialmente la respuesta del sistema eliminando las vibraciones y oscilaciones sostenidas, ya que convierte parte de la energía mecánica (cinética más potencial) en energía térmica, por lo que actúa como freno mecánico disminuyendo la velocidad de movimiento  $x_2$  como se muestra en el diagrama fase (gráfica inferior de la figura 6.16).



**Figura 6.16** Respuesta de un sistema masa resorte amortiguador horizontal.

La simulación puede ser realizada desde el editor integrado de **MATLAB** seleccionando el archivo `simu_smrah.m` y oprimiendo el icono *play* comando (`run`) o desde la ventana de comandos de **MATLAB** por teclear el nombre del programa principal:

```
fx >> simu_smrah ←
```

En ambos casos es recomendable que cuando descargue los programas desde el sitio Web del libro almacene todos sus archivos fuente **MATLAB** en la misma carpeta o directorio de su computadora personal.

### 📌 Código Fuente 6.7 smrah

Mecatrónica. Control y Automatización.

Capítulo 6 Dinámica.

Fernando Reyes Cortés, Jaime Cid Monjaraz y Emilio Vargas Soto.

Alfaomega Grupo Editor: “**Te acerca al conocimiento**”.

---

Archivo smrah.m

Versión de **MATLAB** 2012a

---

```

1 function xp =smrah(t,x)
2     %vector de estados
3     x1=x(1);% posición articular
4     x2=x(2);%velocidad articular
5     %parámetros del sistema masa resorte amortiguador
6     m=5;%masa
7     k=6;%constante de rigidez del resorte
8     b=0.007;%coeficiente de fricción viscosa interno o propio del sistema
9     ba=3.5;%elemento de amortiguamiento
10    %implementación de la la función pulso unitario de la fuerza aplicada f
11    if (t>=0) && (t<3)
12        | fuerza=0;%implementación de la la función pulso unitario de la fuerza aplicada f
13    end
14    if (t>=3) && (t<4)
15        | fuerza=1;
16    end
17    if (t>=4) && (t<=20)
18        | fuerza=0;
19    end
20    %note como el elemento amortiguador  $b_a$  contribuye aumentando la fricción viscosa del sistema
21    %de tal forma que el coeficiente total de fricción viscosa es  $b_a + b$ 
22    x2p=(fuerza-(b+ba)*x2-k*x1)/m;%aceleración del sistema masa resorte
23    xp=[x2;%vector de salida formado por: velocidad de movimiento
24        x2p];%aceleración
25 end

```

---

 **Código Fuente 6.8 simu\_smrah**

Mecatrónica. Control y Automatización.

Capítulo 6 Dinámica.

Fernando Reyes Cortés, Jaime Cid Monjaraz y Emilio Vargas Soto.

Alfaomega Grupo Editor: “Te acerca al conocimiento”.

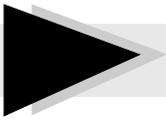
---

Archivo `simu_smrah.m`

Versión de **MATLAB** 2012a

---

```
1 clc;
2 clear all;
3 close all;
4 format short
5 %parámetros de simulación
6 ti=0; h=0.001; tf = 20;
7 ts=ti:h:tf;%vector tiempo para simulación
8 ci=[0; 0];%condiciones iniciales x1(0)=0, x2(0)=0
9 %configuración de la función de integración numérica ode45(...)
10 opciones=odeset('RelTol',0.001*h,'InitialStep', h, 'MaxStep',h);
11 [t, x]=ode45('smrah',ts,ci,opciones);
12 subplot(2,1,1); plot(t,x(:,1))%grafica la posición x1(t)
13 subplot(2,1,2); plot(x(:,1),x(:,2))%grafica la velocidad x2(t)
```



## 6.4 Simulación de sistemas mecánicos

La simulación de sistemas dinámicos lineales y no lineales se realiza en variables de estado mediante una ecuación diferencial de primer orden (**ode**) con la siguiente estructura:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

donde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  es una variable de estado (fase o canónicas) proporciona información interna sobre la dinámica del sistema mecánico,  $\mathbf{x}$  es una función continua en el tiempo  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ ; la derivada temporal de la variable de estado  $\dot{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$  existe y también es continua en el tiempo  $\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}(t)$ . La notación  $\dot{\mathbf{x}}$  significa  $\dot{\mathbf{x}} = \frac{d}{dt}\mathbf{x}(t)$ . La función  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$  es un mapa vectorial continuo en la variable de estado  $\mathbf{x}(t)$ .



### 6.4.1 Ejemplos de simulación

La forma algorítmica para simular sistemas dinámicos es por medio de variables de estado mediante la estructura  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ . A continuación se describe la programación de diversos modelos dinámicos empleando variables de estado, el método de integración numérica Runge-Kutta 4/5 por medio de la función `ode45(...)` y funciones anidadas.



### 6.4.2 Ejemplo 1

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{bmatrix}$$

condiciones iniciales  $[x_1(0) \ x_2(0)]^T = [1 \ 0]^T$ . La figura 6.17 muestra los resultados de simulación.

 **Código Fuente 6.9 cap6\_ejemplo1**

Mecatrónica. Control y Automatización.

Capítulo 6 Dinámica.

Fernando Reyes Cortés, Jaime Cid Monjaraz y Emilio Vargas Soto.

Alfaomega Grupo Editor: “**Te acerca al conocimiento**”.

---

Archivo cap6\_ejemplo1.m

Versión de **MATLAB** 2012a

---

```

1 function cap6_ejemplo1
2     clc;
3     clear all;
4     close all;
5     format short
6     %parámetros de simulación
7     ti=0; h=0.001; tf = 10;
8     ts=ti:h:tf;% vector tiempo para simulación
9     ci=[1; 0]; %condiciones iniciales x1(0)=1, x2(0)=0
10    %configuración de la función de integración numérica ode45(...)
11    opciones=odeset('RelTol',0.001*h,'InitialStep', h, 'MaxStep',h);
12    [t, x]=ode45(@ejemplo1a,ts,ci,opciones);
13    subplot(2,1,1);plot(t,x(:,1))%grafica x1(t)
14    subplot(2,1,2);plot(t,x(:,2))%grafica x2(t)
15    function xp=ejemplo1a(t,x)
16        %vector de estados
17        x1=x(1); % posición
18        x2=x(2); %velocidad
19        xp1=x2;
20        xp2=-x1;
21        xp=[xp1;
22            xp2];
23    end
24 end

```

La simulación puede ser realizada desde el editor integrado de **MATLAB** seleccionando el archivo `cap6_ejemplo1.m` y oprimiendo el icono *play* comando (*run*) o desde la ventana de comandos de **MATLAB**

por teclear el nombre de la función:

```
fx >> cap6_ejemplo1 ↵
```

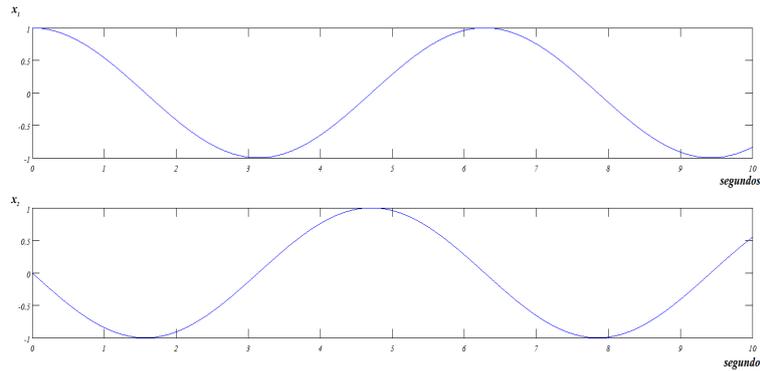


Figura 6.17 Respuesta del ejemplo 1.



### 6.4.3 Ejemplo2

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} u$$

condiciones iniciales  $[x_1(0) \ x_2(0)]^T = [0 \ 0]^T$ . La figura 6.18 muestra los resultados de simulación.

### 🚩 Código Fuente 6.10 cap6\_ejemplo2

Mecatrónica. Control y Automatización.

Capítulo 6 Dinámica.

Fernando Reyes Cortés, Jaime Cid Monjaraz y Emilio Vargas Soto.

Alfaomega Grupo Editor: “Te acerca al conocimiento”.

---

Archivo cap6\_ejemplo2.m

Versión de **MATLAB** 2012a

---

```

1 function cap6_ejemplo2
2     clc;
3     clear all;
4     close all;
5     format short
6     %parámetros de simulación
7     ti=0; h=0.001; tf = 5;
8     ts=ti:h:tf;% vector tiempo para simulación
9     ci=[0; 0]; %condiciones iniciales x1(0)=0, x2(0)=0
10    %configuración de la función de integración numérica ode45(...)
11    opciones=odeset('RelTol',0.001*h,'InitialStep', h, 'MaxStep',h);
12    [t, x]=ode45(@ejemplo2a,ts,ci,opciones);
13    subplot(2,1,1);plot(t,x(:,1))%grafica x1(t)
14    subplot(2,1,2);plot(t,x(:,2))%grafica x2(t)
15    function xp=ejemplo2a(t,x)
16        %vector de estados
17        x1=x(1); % posición
18        x2=x(2); %velocidad
19        x=[x1; x2];
20        A=[0, 1; -3, -5];
21        B=[0; 10];
22        u(t_i=0)=1;
23        xp=A*x+B*u;
24    end
25 end

```

La simulación puede ser realizada desde el editor integrado de **MATLAB** seleccionando el archivo

cap6\_ejemplo2.m y oprimiendo el icono *play* comando (run) o desde la ventana de comandos de MATLAB por teclear el nombre de la función:

```
fx >> cap6_ejemplo2 ↵
```

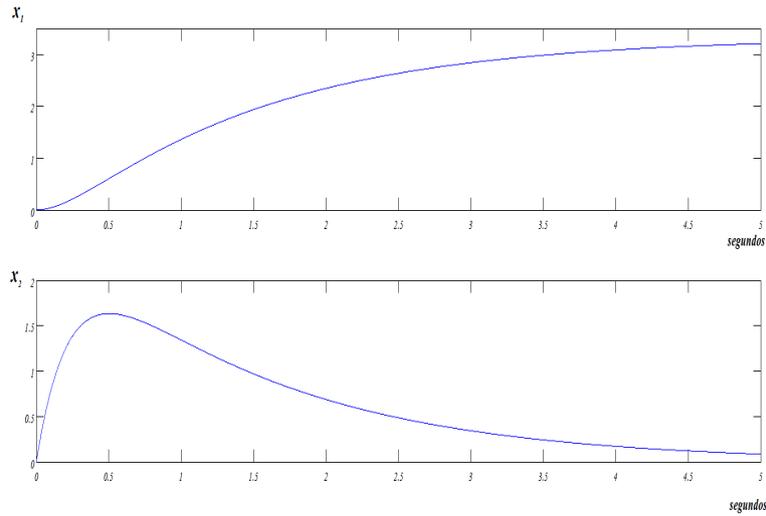


Figura 6.18 Respuesta del ejemplo 2.



#### 6.4.4 Ejemplo3

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sen}(x_1) + 0.8 \tanh(x_2) \\ \cos(x_2 x_1) \end{bmatrix}$$

condiciones iniciales  $[x_1(0) \ x_2(0)]^T = [1 \ 0]^T$ . La figura 6.19 muestra los resultados de simulación.

### 📌 Código Fuente 6.11 cap6\_ejemplo3

Mecatrónica. Control y Automatización.

Capítulo 6 Dinámica.

Fernando Reyes Cortés, Jaime Cid Monjaraz y Emilio Vargas Soto.

Alfaomega Grupo Editor: “Te acerca al conocimiento”.

---

Archivo cap6\_ejemplo3.m

Versión de **MATLAB** 2012a

---

```

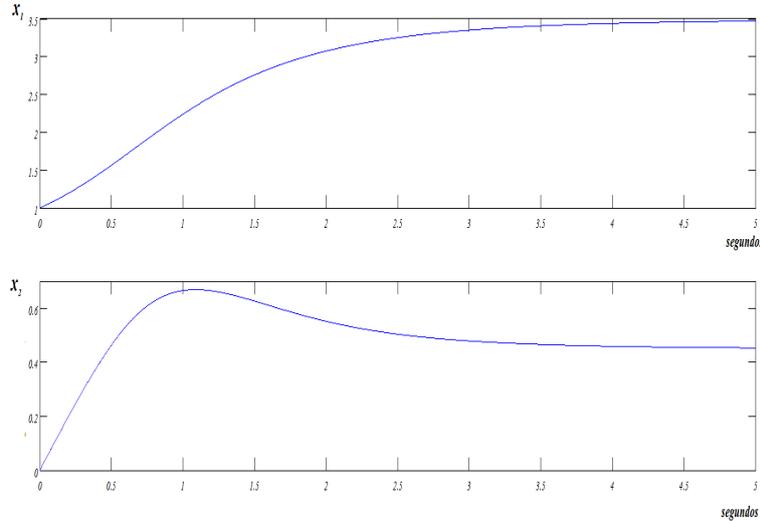
1 function cap6_ejemplo3
2     clc;
3     clear all;
4     close all;
5     format short
6     %parámetros de simulación
7     ti=0; h=0.001; tf = 5;
8     ts=ti:h:tf;% vector tiempo para simulación
9     ci=[1; 0]; %condiciones iniciales x1(0)=1, x2(0)=0
10    %configuración de la función de integración numérica ode45(...)
11    opciones=odeset('RelTol',0.001*h,'InitialStep', h, 'MaxStep',h);
12    [t, x]=ode45(@ejemplo3a,ts,ci,opciones);
13    subplot(2,1,1);plot(t,x(:,1))%grafica x1(t)
14    subplot(2,1,2);plot(t,x(:,2))%grafica x2(t)
15    function xp=ejemplo3a(t,x)
16        %vector de estados
17        x1=x(1); % posición
18        x2=x(2); %velocidad
19        x=[x1; x2];
20        xp1=sin(x1)+0.8*tanh(x2);
21        xp2=cos(x2*x1);
22        xp=[ xp1;
23            xp2];
24    end
25 end

```

La simulación puede ser realizada desde el editor integrado de **MATLAB** seleccionando el archivo

cap6\_ejemplo3.m y oprimiendo el icono *play* comando (run) o desde la ventana de comandos de MATLAB por teclear el nombre de la función:

```
fx >> cap6_ejemplo3 ↵
```



**Figura 6.19** Respuesta del ejemplo 3.