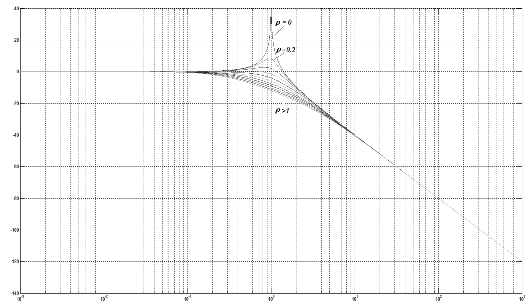
7 Capítulo

Control clásico



Material Web

7.1 Ejemplos prácticos con Bode

ESTA sección está destinada a presentar diversos ejemplos de programación para obtener las gráficas de Bode. Como sistema de estudio será considerado un sistema masa resorte amortiguador con movimiento horizontal.

7.1.1 Sistema masa resorte amortiguador

Considere el sistema masa resorte amortiguador que se muestra en la figura 7.1, el modelo dinámico que describe el comportamiento de todos los fenómenos físicos que se encuentran presentes en el sistema mecánico está dado por la siguiente expresión:

$$f \quad = \quad m\ddot{y} + b\dot{y} + ky \tag{7.1}$$

donde $m, b, k \in \mathbb{R}_+$ corresponden a la masa, fricción viscosa del amortiguador y constante de rigidez del resorte, respectivamente; y es el desplazamiento del bloque (cuerpo rígido), $\dot{y}$ es la velocidad de movimiento, la aceleración se encuentra representada por $\ddot{y}$ y la fuerza aplicada es f.

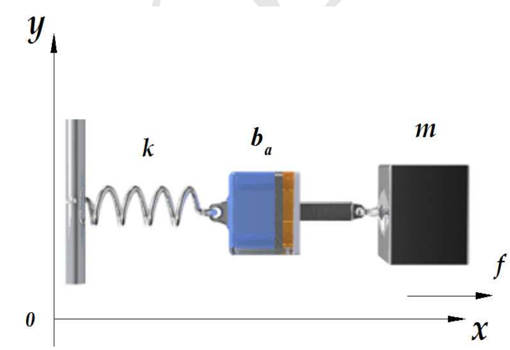


Figura 7.1 Sistema masa resorte amortiguador horizontal.

En términos de la frecuencia, el modelo dinámico puede ser representado por una función de transferencia que relaciona la respuesta $y(s)$, fuerza aplicada $f(s)$ con la frecuencia natural de oscilación w_n y el factor de amortiguamiento ρ:

$$G(s) = \frac{y(s)}{f(s)} \quad = \quad \frac{1}{ms^2 + bs + k} = \frac{\frac{1}{m}}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}} = \frac{1}{k} \quad \frac{\frac{k}{m}}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}} = A\frac{w_n^2}{s^2 + 2\rho w_n s + w_n^2}$$

donde: $A = \frac{1}{k}$ es la ganancia de la función de transferencia $G(s)$, la frecuencia natural de oscilación está dada por $w_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ y el factor de amortiguamiento $\rho = \frac{b}{2\sqrt{mk}}$. El coeficiente de fricción viscosa incluye el fenómeno de fricción interno más el fenómeno disipativo del amortiguador.

Los polos (ceros o raíces del polinomio del denominador) de la función de transferencia $G(s)$ se obtienen de la siguiente forma: $\text{polos}(s) = -\rho w_n \pm w_n\sqrt{\rho^2 - 1}$

Dependiendo del valor numérico del factor de amortiguamiento ρ se deducen los siguientes casos de estudio: oscilatorio ($\rho = 0$), sub amortiguado ($\rho < 1$), amortiguamiento crítico($\rho = 1$) y sobre amortiguado ($\rho > 1$).

Oscilatorio $\rho = 0$

El sistema tendrá una respuesta oscilatoria con un pico máximo cuando el factor de amortiguamiento $\rho = 0$, los dos polos de la función de transferencia serán complejos con parte real cero $\text{polos}(s) = \pm w_n i$ (complejo conjugado). La función de transferencia $G(s)$ adquiere la forma: $G(s) = \frac{w_n^2}{s^2 + w_n^2}$. La figura 7.2 muestra los resultados de simulación del programa `cap7_bode_oscilatorio.m` descrita en el cuadro 7.1.

Tabla 7.1 Parámetros del sistema masa resorte amortiguador horizontal

Parámetro	Valor
Masa m	5 kg
Coeficiente de fricción viscosa b	0 N-seg/m (caso ideal)
Constante de rigidez k	6 N/m
Ganancia de $G(s)$ $A = \frac{1}{k}$	0.1667 m/N
Frecuencia natural de oscilación $w_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$	1.0954 rad/seg
Factor de amortiguamiento $\rho = \frac{b}{2\sqrt{mk}}$	0

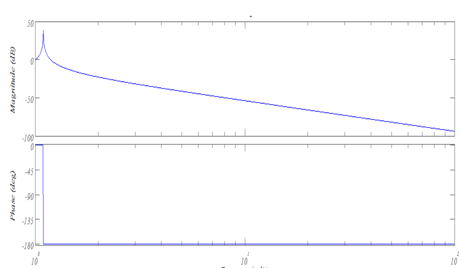


Figura 7.2 Respuesta oscilatoria: $\rho = 0$.

Código Fuente 7.1 cap7_bode_oscilatorio

Mecatrónica. Control y Automatización.

Capítulo 7 Control clásico.

Fernando Reyes Cortés, Jaime Cid Monjaraz y Emilio Vargas Soto.

Alfaomega Grupo Editor: "**Te acerca al conocimiento**".

Archivo cap7_bode_oscilatorio.m	Versión de MATLAB 2012a

```
clc;
clear all;
close all;
format short
%Parámetros del sistema masa resorte amortiguador
%Coeficiente de fricción viscosa
b=0; %N-seg/m. Caso ideal donde el sistema no tiene fricción
%Constante de rigidez
k=6; %N/m
m=5; %Kg, masa
%Frecuencia natural de oscilación $w_n$
wn=sqrt(k/m);
%factor de amortiguamiento $\rho$
rho=b/(2*sqrt(m*k));
A=1/k; %ganancia $A = \frac{1}{k}$ de la función de transferencia G(s)
%Función de transferencia $G(s) = \frac{\mathrm{num(s)}}{\mathrm{den(s)}} = A\frac{w_n^2}{s^2+2\rho w_n s+w_n^2}$
num=wn*wn; %numerador num(s)=$w_n^2$
den=[1, 2*rho*wn, wn*wn]; %denominador den(s)=$s^2 + 2\rho w_n s + w_n^2$
%función de transferencia $G(s)$
G=tf(A*num,den); $G(s) = A\frac{\mathrm{num(s)}}{\mathrm{den(s)}}$
% arreglo de frecuencias especificando el mínimo y máximo de frecuencias
w=logspace(0,2,1000); %genera 1000 puntos entre $10^0$ y $10^2$
%gráfica de Bode
bode(G,w)
roots(den); %calcula los polos de la función de transferencia $G(s)$
```

Sub amortiguado $\rho < 1$

En el caso de que el factor de amortiguamiento $\rho < 1$, el sistema presenta un amortiguamiento débil, presentando un número considerable de oscilaciones que se irán desvaneciendo paulatinamente con el tiempo, el estado transitorio es indeseable y puede durar un lapso de tiempo grande, inclusive en estado estacionario se pueden producir un pequeño rizo permanente. La figura 7.3 muestra la gráfica de Bode de $G(s)$. Para obtener los resultados de simulación se utiliza el programa `cap7_bode_subamortiguado.m` el cual contiene el código fuente Matlab descrito en el cuadro 7.2. La magnitud de $G(s)$ tiene una caída suave de 20 decibeles por década y la fase converge a -180 grados.

Tabla 7.2 Parámetros del sistema masa resorte amortiguador horizontal

Parámetro	Valor
Masa m	5 kg
Coeficiente de fricción viscosa b	3.5007 N-seg/m
Constante de rigidez k	6 N/m
Ganancia de $G(s)$ $A = \frac{1}{k}$	0.1667 m/N
Frecuencia natural de oscilación $w_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$	1.0954 rad/seg
Factor de amortiguamiento $\rho = \frac{b}{2\sqrt{mk}}$	0.3196
Polos de $G(s)$	-0.3501 + 1.0380i -0.3501 - 1.0380i

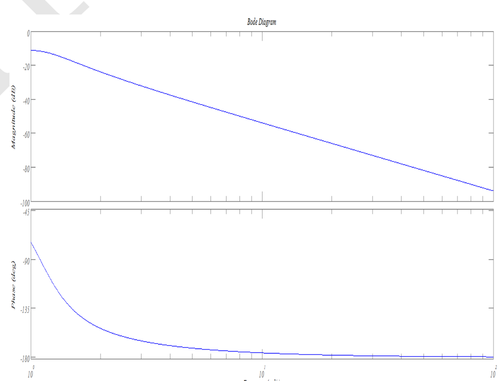


Figura 7.3 Respuesta sub amortiguada: $\rho = 0.3196$.

Código Fuente 7.2 cap7_bode_subamortiguado

Mecatrónica. Control y Automatización.

Capítulo 7 Control clásico.

Fernando Reyes Cortés, Jaime Cid Monjaraz y Emilio Vargas Soto.

Alfaomega Grupo Editor: "**Te acerca al conocimiento**".

Archivo cap7_bode_subamortiguado.m	Versión de MATLAB 2012a

```
clc;
clear all;
close all;
format short
%Parámetros del sistema masa resorte amortiguador
%Coeficiente de fricción viscosa
b=3.5007; %N-seg/m
%Constante de rigidez
k=6; %N/m
m=5; %Kg, masa
%Frecuencia natural de oscilación $w_n$
wn=sqrt(k/m);
%factor de amortiguamiento $\rho$
rho=b/(2*sqrt(m*k));
A=1/k; %ganancia $A=\frac{1}{k}$ de la función de transferencia G(s)
%Función de transferencia $G(s)=\frac{\mathrm{num(s)}}{\mathrm{den(s)}}=A\frac{w_n^2}{s^2+2\rho w_n s+w_n^2}$
num=wn*wn; %numerador num(s)=$w_n^2$
den=[1, 2*rho*wn, wn*wn]; %denominador den(s)=$s^2+2\rho w_n s+w_n^2$
%función de transferencia $G(s)$
G=tf(A*num,den); $G(s)=A\frac{\mathrm{num(s)}}{\mathrm{den(s)}}$
% arreglo de frecuencias especificando el mínimo y máximo de frecuencias
w=logspace(0,2,1000); %genera 1000 puntos entre $10^0$ y $10^2$
%gráfica de Bode
bode(G,w)
roots(den); %calcula los polos de la función de transferencia $G(s)$
```

Cuando $\rho << 1$ el efecto de amortiguamiento es muy débil, presentando un número considerable de oscilaciones que se irán desvaneciendo paulatinamente con el tiempo, la figura 7.4 muestra la gráfica de Bode corresponde a $G(s)$. Los resultados de simulación se obtienen con el programa `cap7_bode_subamortiguado1.m` (ver cuadro 7.3). Observe como la fase de $G(s)$ converge muy rápido a -180 grados para frecuencias muy bajas y la magnitud de $G(s)$ tiene una caída suave de -50 decibeles por década.

Tabla 7.3 Parámetros del sistema masa resorte amortiguador horizontal

Parámetro	Valor
Masa m	5 kg
Coeficiente de fricción viscosa b	0.007 N-seg/m
Constante de rigidez k	6 N/m
Ganancia de $G(s)$ $A = \frac{1}{k}$	0.1667 m/N
Frecuencia natural de oscilación $w_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$	1.0954 rad/seg
Factor de amortiguamiento $\rho = \frac{b}{2\sqrt{mk}}$	6.3901e-04
Polos de $G(s)$	-0.0007 + 1.0954i -0.0007 - 1.0954i

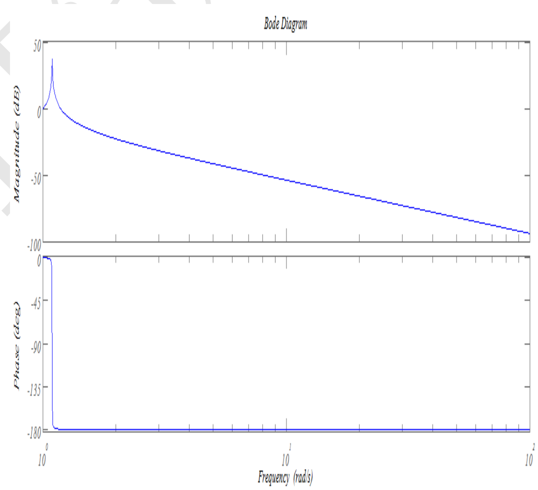


Figura 7.4 Respuesta sub amortiguada para $\rho = 6.3901e-04$.

Código Fuente 7.3 cap7_bode_subamortiguado1

Mecatrónica. Control y Automatización.

Capítulo 7 Control clásico.

Fernando Reyes Cortés, Jaime Cid Monjaraz y Emilio Vargas Soto.

Alfaomega Grupo Editor: "**Te acerca al conocimiento**".

Archivo cap7_bode_subamortiguado1.m — Versión de MATLAB 2012a

```
clc;
clear all;
close all;
format short
%Parámetros del sistema masa resorte amortiguador
%Coeficiente de fricción viscosa
b=0.007; %N-seg/m
%Constante de rigidez
k=6; %N/m
m=5; %Kg, masa
%Frecuencia natural de oscilación $w_n$
wn=sqrt(k/m);
%factor de amortiguamiento $\rho$
rho=b/(2*sqrt(m*k));
A=1/k; %ganancia $A = \frac{1}{k}$ de la función de transferencia G(s)
%Función de transferencia $G(s) = \frac{\text{num(s)}}{\text{den(s)}} = A\frac{w_n^2}{s^2+2\rho w_n s+w_n^2}$
num=wn*wn; %numerador num(s)=$w_n^2$
den=[1, 2*rho*wn, wn*wn]; %denominador den(s)=$s^2 + 2\rho w_n s + w_n^2$
%función de transferencia $G(s)$
G=tf(A*num,den); $G(s) = A\frac{\text{num(s)}}{\text{den(s)}}$
% arreglo de frecuencias especificando el mínimo y máximo de frecuencias
w=logspace(0,2,1000); %genera 1000 puntos entre $10^0$ y $10^2$
%gráfica de Bode
bode(G,w)
roots(den); %calcula los polos de la función de transferencia $G(s)$
```

Amortiguamiento crítico $\rho = 1$

Si el factor de amortiguamiento $\rho = 1$ el comportamiento del sistema se le denomina críticamente amortiguado y su respuesta transitoria exhibirá muy pocas oscilaciones o vibraciones mecánica, en la fase estacionaria la respuesta del sistema convergerá en forma lenta. Los resultados de simulación se ilustran en la figura 7.5 y el programa principal **Matlab** se denomina `cap7_bode_amortiguamiento_critico.m` (consultar cuadro 7.4).

Tabla 7.4 Parámetros del sistema masa resorte amortiguador horizontal

Parámetro	Valor
Masa m	5 kg
Coeficiente de fricción viscosa b	$2\sqrt{m\ k} = 10.9545$ N-seg/m
Constante de rigidez k	6 N/m
Ganancia de $G(s)$ $A = \frac{1}{k}$	0.1667 m/N
Frecuencia natural de oscilación $w_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$	1.0954 rad/seg
Factor de amortiguamiento $\rho = \frac{b}{2\sqrt{mk}}$	1
Dos polos reales iguales de $G(s)$	$(\,s + 1.0954\,)\,(\,s + 1.0954\,)$

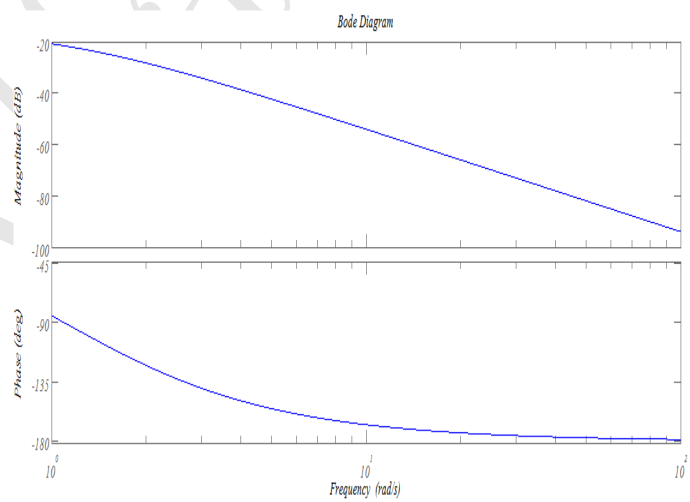


Figura 7.5 Respuesta con amortiguamiento crítico $\rho = 1$.

Código Fuente 7.4 cap7_bode_amortiguamiento_critico

Mecatrónica. Control y Automatización.

Capítulo 7 Control clásico.

Fernando Reyes Cortés, Jaime Cid Monjaraz y Emilio Vargas Soto.

Alfaomega Grupo Editor: "**Te acerca al conocimiento**".

Archivo cap7_bode_amortiguamiento_critico.m Versión de MATLAB 2012a

```
clc;
clear all;
close all;
format short
%Parámetros del sistema masa resorte amortiguador
k=6; %N/m %Constante de rigidez
m=5; %Kg, masa
%Coeficiente de fricción viscosa
b=2*sqrt(m*k); %N-seg/m amortiguamiento crítico
%Frecuencia natural de oscilación w_n
wn=sqrt(k/m);
%factor de amortiguamiento ρ
rho=b/(2*sqrt(m*k));
A=1/k; %ganancia A = 1/k de la función de transferencia G(s)
%Función de transferencia G(s) = num(s)/den(s) = A w_n^2/(s^2+2ρw_n s+w_n^2)
num=wn*wn; %numerador num(s)=w_n^2
den=[1, 2*rho*wn, wn*wn]; %denominador den(s)=s^2 + 2ρw_n s + w_n^2
%función de transferencia G(s)
G=tf(A*num,den); G(s) = A num(s)/den(s)
% arreglo de frecuencias especificando el mínimo y máximo de frecuencias
w=logspace(0,2,1000); %genera 1000 puntos entre 10^0 y 10^2
%gráfica de Bode
bode(G,w)
roots(den); %calcula los polos de la función de transferencia G(s)
```

Sobre amortiguado $\rho > 1$

Cuando el factor de amortiguamiento $\rho > 1$, los dos polos de la función de transferencia son reales, el sistema se comporta con un efecto fuerte de disipación, como si tuviera acoplado un “freno mecánico” muy grande, entonces el movimiento oscilatorio no estará presente, ni las vibraciones mecánicas. La figura 7.6 muestra los resultados de simulación obtenidos mediante el programa `cap7_bode_sobre_amortiguamiento.m` como se ilustra en el cuadro 7.5.

Tabla 7.5 Parámetros del sistema masa resorte amortiguador horizontal

Parámetro	Valor
Masa m	5 kg
Coeficiente de fricción viscosa b	$8\sqrt{m\,k} = 43.8178$ N-seg/m
Constante de rigidez k	6 N/m
Ganancia de $G(s)$ $A = \frac{1}{k}$	0.1667 m/N
Frecuencia natural de oscilación $w_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$	1.0954 rad/seg
Factor de amortiguamiento $\rho = \frac{b}{2\sqrt{mk}}$	4
Dos polos reales de $G(s)$	$(\,s + 8.6244\,)\,(\,s + 0.1391\,)$

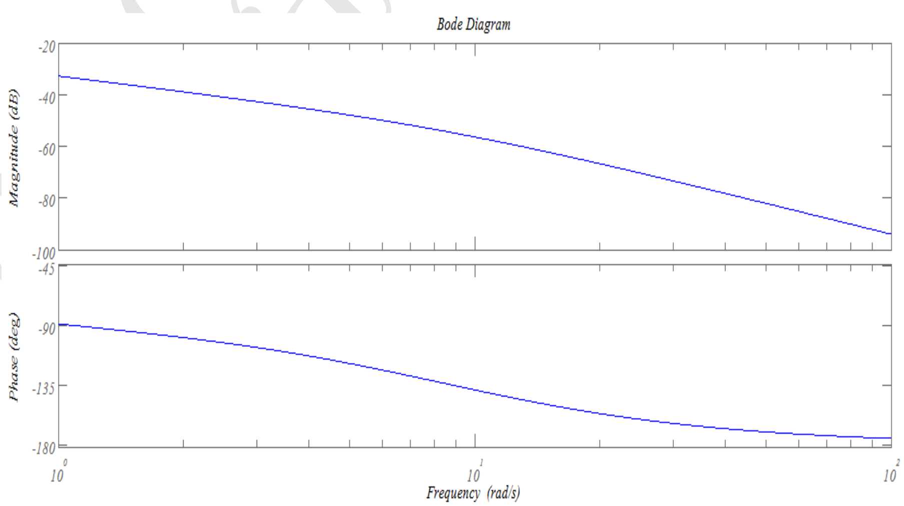


Figura 7.6 Respuesta sobre amortiguada $\rho = 4$.

Código Fuente 7.5 cap7_bode_sobre_amortiguamiento

Mecatrónica. Control y Automatización.

Capítulo 7 Control clásico.

Fernando Reyes Cortés, Jaime Cid Monjaraz y Emilio Vargas Soto.

Alfaomega Grupo Editor: "**Te acerca al conocimiento**".

Archivo cap7_bode_sobre_amortiguamiento.m Versión de **MATLAB** 2012a

```
clc;
clear all;
close all;
format short
%Parámetros del sistema masa resorte amortiguador
k=6; %N/m %Constante de rigidez
m=5; %Kg, masa
%Coeficiente de fricción viscosa
b=8*sqrt(m*k); %N-seg/m sobre amortiguamiento
%Frecuencia natural de oscilación $w_n$
wn=sqrt(k/m);
%factor de amortiguamiento $\rho$
rho=b/(2*sqrt(m*k));
A=1/k; %ganancia $A = \frac{1}{k}$ de la función de transferencia G(s)
%Función de transferencia $G(s) = \frac{\text{num(s)}}{\text{den(s)}} = A\frac{w_n^2}{s^2+2\rho w_n s+w_n^2}$
num=wn*wn; %numerador num(s)=$w_n^2$
den=[1, 2*rho*wn, wn*wn]; %denominador den(s)=$s^2 + 2\rho w_n s + w_n^2$
%función de transferencia $G(s)$
G=tf(A*num,den); $G(s) = A\frac{\text{num(s)}}{\text{den(s)}}$
% arreglo de frecuencias especificando el mínimo y máximo de frecuencias
w=logspace(0,2,1000); %genera 1000 puntos entre $10^0$ y $10^2$
%gráfica de Bode
bode(G,w)
roots(den); %calcula los polos de la función de transferencia $G(s)$
```