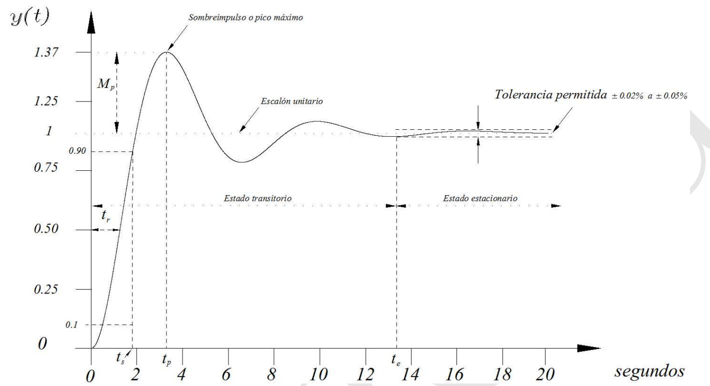
Capítulo 8

Análisis de sistemas con variables de estado



Material Web

8.1 Laplace: teoría y práctica

La teoría de la transformada de Laplace es muy extensa, por lo que el propósito de esta sección es presentar en forma breve y concisa los aspectos fundamentales enfocados a la aplicación en el área de la ingeniería mecatrónica.

> La transformada de Laplace es una herramienta analítica aplicada a la ingeniería que permite realizar análisis y síntesis de circuitos eléctricos, electrónicos, redes, filtros, amplificadores, servomecanismos, etc. La transformada de Laplace convierte una función definida en el dominio del tiempo t a una función en la variable compleja s, que generalmente contiene componente real a e imaginaria b, es decir tiene la forma: $s = a + ib$. La transformada de Laplace facilita el análisis de sistemas lineales en el dominio de la frecuencia.

La transformada de Laplace se emplea para resolver ecuaciones diferenciales lineales, reemplaza operaciones como derivadas e integrales por operaciones algebraicas simples (multiplicación y división, respectivamente) en el plano complejo de la variable $s \in C$. La transformada de Laplace permite graficar el funcionamiento del sistema sin la necesidad de resolver el sistema de ecuaciones del modelo o planta.

8.1.1 Transformada de Laplace

Dada una función $f(t)$ definida para todo intervalo $t \geq 0$, la **notación** más utilizada para representar la transformada de Laplace de la función $f(t)$ es: $\mathcal{L}[f(t)] = f(s)$.

Defineión: sea la siguiente integral

$$f(s) = \mathcal{L}[f(t)] \quad = \quad \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \tag{8.1}$$

donde s es un número complejo $s \in C$, para el proceso de integración se considera constante. Si la integral 8.1 converge para algún valor de s, entonces la transformada de Laplace $\mathcal{L}[f(t)]$ existe.

Como ejercicio ilustrativo, a continuación se presenta el desarrollo analítico de la transformada de Laplace $\mathcal{L}[f(t)]$ para algunas funciones elementales $f(t)$ que se emplean de manera importante en ingeniería mecatrónica.

Transformada de Laplace de constantes

Desde el punto de vista matemático la estructura más simple lo representan las constantes en el tiempo, por ejemplo los parámetros de un robot se pueden considerar constantes durante su vida útil $\forall\ t \geq 0$.

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ una constante, entonces la transformada de Laplace $\mathcal{L}[\alpha]$ de una función constante en el tiempo $f(t) = \alpha$ se obtiene como:

$$
\begin{aligned}
f(s) = \mathcal{L}[\alpha] &= \int_0^\infty \alpha\ e^{-st} dt = -\alpha \frac{1}{s} \int_0^\infty e^u du \\
&= -\alpha \frac{1}{s} e^u \Big|_0^\infty = -\alpha \frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^\infty \\
&= -\alpha \frac{1}{s} \left[\cancelto{0}{e^{-\infty}} - \cancelto{1}{e^{-0}} \right] \\
&= \frac{\alpha}{s}
\end{aligned}
$$

Aspectos técnicos matemáticos

Para realizar la integral de $\int_0^\infty \alpha e^{-st} dt$ se realiza un cambio de variable de la siguiente forma: sea $u = -st$, $du = -sdt \Rightarrow dt = -\frac{1}{s}$, por lo que se obtiene $\int_0^\infty \alpha e^{-st} dt = -\alpha \frac{1}{s} \int_0^\infty e^u du$. Recuerde que la derivada e integral de la función e^u conserva la misma función e^u, es decir: $\frac{d}{u} e^u = e^u$ y $\int_{u_0}^{u} e^u du = e^u \Big|_{u_0}^{u} = e^u - e^{u_0}$.

Para el caso de la integral de la función e^u, el resultado es la misma función e^u evaluada en sus límites u y u_0.

Como caso particular, cuando α toma un valor unitario, entonces $\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}$.

Transformada de Laplace de funciones exponenciales reales

Para el caso donde $f(t)$ tiene la forma de una función exponencial de la forma $f(t) = e^{-at}$, donde $a \in \mathbb{R}_+$, entonces la transforma de Laplace $\mathcal{L}[e^{-at}]$ se obtiene como a continuación se describe:

$$
\begin{aligned}
f(s) = \mathcal{L}[e^{-at}] &= \int_0^\infty e^{-at}\ e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-(s+a)t} dt = -\frac{1}{s+a} e^{-(s+a)t} \Big|_0^\infty = -\frac{1}{s+a} \left[\cancelto{0}{e^{-\infty}} - \cancelto{1}{e^{0}} \right] \\
&= \frac{1}{s+a}
\end{aligned}
$$

De manera análoga, se puede obtener $\mathcal{L}[e^{-at}] = \frac{1}{s-a}$.

Transformada de Laplace de funciones exponenciales imaginarias

Cuando $f(t)$ tiene la forma de una función exponencial con componente imaginaria $f(t) = e^{iwt}$, donde $w \in \mathrm{I\!R}_+$, entonces la transforma de Laplace $\mathcal{L}[e^{iwt}]$ se obtiene como a continuación se describe:

$$
\begin{aligned}
f(s) = \mathcal{L}[e^{iwt}] &= \int_0^\infty e^{iwt}\ e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{(iw-s)t}dt = \int_0^\infty e^{-(s-iw)t}dt \\
&= -\frac{1}{s-iw}e^{-(s-iw)t}\Bigg|_0^\infty = -\frac{1}{s-iw}\,[\cancelto{0}{e^{-\infty}} - \cancelto{1}{e^{0}}\ ] \\
&= \frac{1}{s-iw}
\end{aligned}
$$

En forma similar, se pueden obtener $\mathcal{L}[e^{-iwt}] = \frac{1}{s+iw}$, $\mathcal{L}[e^{(\alpha+iw)t}] = \frac{1}{s-\alpha-iw}$ y $\mathcal{L}[e^{(\alpha-iw)t}] = \frac{1}{s-\alpha+iw}$, donde $\alpha \in \mathrm{I\!R}$.

Transformada de Laplace de funciones trigonométricas

Considere la función $f(t) = \cos(wt)$, donde $w \in \mathrm{I\!R}_+$ es la frecuencia de la señal, la evolución del tiempo se encuentra representado por $t \geq 0$.

La función cosenoidal se puede expresar en términos de funciones exponenciales (fórmula de Euler) como la suma de dos complejos conjugados:

$$
\cos(wt) = \frac{1}{2}e^{iwt} + \frac{1}{2}e^{-iwt}
$$

tomando la transformada de Laplace para las funciones exponenciales previamente desarrolladas $\mathcal{L}[e^{iwt}] = \frac{1}{s-w}$ y $\mathcal{L}[e^{-iwt}] = \frac{1}{s+w}$ se obtiene:

$$
\begin{aligned}
f(s) = \mathcal{L}[\cos(wt)] &= \frac{1}{2}\frac{1}{s-iw} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+iw} = \frac{1}{2}\frac{(\,s+\cancel{iw}\,)+(\,s-\cancel{iw}\,)}{(\,s-iw\,)(\,s+iw\,)} \\
&= \frac{s}{s^2+w^2}
\end{aligned}
$$

donde se ha considerado que $i^2 = -1$ o $i = \sqrt{-1}$, además:

$$\begin{array}{c} s - iw \\ s + iw \\ \hline s^2 - \cancel{isw} \qquad \\ \qquad \cancel{isw} + w^2 \\ \hline s^2 + w^2 \end{array}$$

En forma similar, aplicando el mismo procedimiento para la función senoidal $\mathrm{sen}(wt)$ se obtiene:

$$\mathrm{sen}(wt) = \frac{1}{2} i e^{-iwt} - \frac{1}{2} i e^{iwt}$$

la transformada de Laplace de la función $f(t) = \mathrm{sen}(wt)$ adquiere la siguiente forma:

$$\begin{aligned} f(s) = \mathcal{L}[\mathrm{sen}(wt)] &= \frac{1}{2}\, i \frac{1}{s + iw} - \frac{1}{2}\, i \frac{1}{s - iw} = \frac{1}{2} \frac{i\,(s - iw) + i\,(s + iw)}{(s + iw)\,(s - iw)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\cancel{is} + w - \cancel{is} + w}{s^2 + w^2} \\ &= \frac{w}{s^2 + w^2} \end{aligned}$$

Considere la función $f(t) = \mathrm{sen}(wt + \phi)$, donde $\phi \in \mathbb{R}$ es una constante. Empleando identidades trigonométricas se desarrolla la siguiente expresión:

$$\mathrm{sen}(wt + \phi) = \mathrm{sen}(wt)\cos(\phi) + \cos(wt)\mathrm{sen}(\phi)$$

resultando $\mathrm{sen}(\phi)$ y $\cos(\phi)$ constantes. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\cos(\phi)\mathrm{sen}(wt)] &= \cos(\phi) \frac{w}{s^2 + w^2} \\ \mathcal{L}[\mathrm{sen}(\phi)\cos(wt)] &= \mathrm{sen}(\phi) \frac{s}{s^2 + w^2} \end{aligned}$$

De ahí, que la transformada de Laplace de $f(s) = \mathcal{L}[\cos(\phi)\mathrm{sen}(wt) + \mathrm{sen}(\phi)\cos(wt)]$ es :

$$\begin{aligned} f(s) = \mathcal{L}[\cos(\phi)\mathrm{sen}(wt) + \mathrm{sen}(\phi)\cos(wt)] &= \cos(\phi)\frac{w}{s^2 + w^2} + \mathrm{sen}(\phi)\frac{s}{s^2 + w^2} \\ &= \frac{\cos(\phi)w + \mathrm{sen}(\phi)s}{s^2 + w^2} \end{aligned}$$

De manera particular si $\phi = 0$, entonces $f(s) = \mathcal{L}[\cos(\phi)\mathrm{sen}(wt) + \mathrm{sen}(\phi)\cos(wt)] = \mathcal{L}[\mathrm{sen}(wt)] = \frac{w}{s^2+w^2}$ y para $\phi = \frac{\pi}{2}$, $\mathcal{L}[\cos(\phi)\mathrm{sen}(wt) + \mathrm{sen}(\phi)\cos(wt)] = \mathcal{L}[\cos(wt)] = \frac{s}{s^2+w^2}$.

Transformada de Laplace de funciones hiperbólicas

La función $f(t) = \cosh(wt)$ se define de la siguiente manera:

$$\cosh(wt) \;=\; \frac{1}{2}e^{iwt} + \frac{1}{2}e^{-iwt}$$

donde $w \in \mathbb{R}_+$ y el tiempo representado por $t \geq 0$.

Debido a que $\mathcal{L}[e^{iwt}] = \frac{1}{s-w}$ y $\mathcal{L}[e^{-iwt}] = \frac{1}{s+w}$, entonces $\mathcal{L}[\cosh(wt)]$ toma la forma siguiente:

$$\begin{aligned} f(s) = \mathcal{L}[\cosh(wt)] \;&=\; \frac{1}{2}\frac{1}{s-w} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+w} = \frac{1}{2}\frac{s + \cancel{w} + s - \cancel{w}}{(\,s-w\,)\,(\,s+w\,)} \\ &=\; \frac{s}{s^2 - w^2} \end{aligned}$$

Para el caso de la función $f(t) = \operatorname{senh}(wt)$ se desarrolla un procedimiento muy similar:

$$\operatorname{senh}(wt) \;=\; \frac{1}{2}e^{iwt} - \frac{1}{2}e^{-iwt}$$

Por lo que:

$$\begin{aligned} f(s) = \mathcal{L}[\operatorname{senh}(wt)] \;&=\; \frac{1}{2}\frac{1}{s-w} - \frac{1}{2}\frac{1}{s+w} = \frac{1}{2}\frac{\cancel{s} + w - \cancel{s} + w}{(\,s-w\,)\,(\,s+w\,)} \\ &=\; \frac{w}{s^2 - w^2} \end{aligned}$$

Transformada de Laplace de funciones compuestas de exponenciales y senoidales

Considere la función $f(t) = e^{-at}\operatorname{sen}(wt)$, donde $a \in \mathbb{R}$, $w \in \mathbb{R}_+$ y t es la evolución del tiempo $t \geq 0$. La transformada de Laplace de $f(t)$ se obtiene como a continuación se describe:

$$f(t) \;=\; e^{-at}\operatorname{sen}(wt) = e^{-at}\,[\,\tfrac{e^{iwt}}{2i} - \tfrac{e^{-iwt}}{2i}\,] = \frac{1}{2i}\,[\,e^{-(\,a-iw\,)t} - e^{-(\,a+iw\,)t}\,]$$

La transformada de Laplace resultante es:

$$f(s) = \mathcal{L}[e^{-at}\operatorname{sen}(wt)] \;=\; \frac{1}{2i}\,[\,\tfrac{1}{s+\alpha-iw} - \tfrac{1}{s+\alpha+iw}\,] = \frac{w}{(\,s+\alpha\,)^2 + w^2}$$

En forma parecida, la transformada de Laplace $\mathcal{L}[e^{-at}\cos(wt)] = \frac{s+\alpha}{(\,s+\alpha\,)^2+w^2}$.

Transformada de Laplace de la derivada de una función

Considere que $\dot{f}(t) = \frac{d}{dt}f(t)$ representa la derivada de $f(t)$ con respecto al tiempo. La transformada de Laplace de la derivada de una función $\mathcal{L}[\dot{f}(t)]$ se obtiene como:

$$\mathcal{L}[\dot{f}(t)] = \int_0^\infty \dot{f}(t)\ e^{-st}dt = \int_0^\infty \frac{df(t)}{dt}e^{-st}dt$$

Considere el siguiente cambio de notación: $u = f(t)$, $\dot{u} = \frac{du}{dt} = \frac{df(t)}{dt} \Rightarrow du = \frac{df(t)}{dt}dt$, $dv = e^{-st}dt$ y $v = -\frac{e^{-st}}{s}$. Por integración de partes se obtiene

$$f(s) = \int_0^\infty \frac{df(t)}{dt}e^{-st}dt = \int_0^\infty udv - \frac{f(t)e^{-st}}{s}\Bigg|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{-e^{-st}}{s}\frac{df(t)}{dt}dt$$

Observe que el primer término de la anterior integral puede ser analizado como:

$$-\frac{f(t)e^{-st}}{s}\Bigg|_0^\infty = -\frac{f(\infty)e^{-s\infty}}{s} + \frac{f(0)e^0}{s} = \frac{f(0)}{s}$$

puesto que $f(\infty)e^{-s\infty} = 0$ y $e^0 = 1$. El segundo término de la anterior integral:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-st}}{s}\frac{df(t)}{dt}dt = \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}\frac{df(t)}{dt}dt$$

Note que s es constante en la integral, mientras que t es la variable de integración.

Integración por partes

El método de integración por partes permite calcular la integral del producto de dos funciones. Sean $u(t)$ y $v(t)$ funciones continuas en t y existe la primera derivada temporal $\dot{u} = \frac{d}{dt}u(t)$ y $\dot{v} = \frac{d}{dt}v(t)$, entonces

$$\int_0^\infty udv = uv\Big|_0^\infty - \int_0^\infty vdu$$

Por ejemplo, calcular la siguiente integral: $\int t\cos(t)dt$. Sea $u = t$, $\frac{d}{dt}u = 1 \Rightarrow dt = du$, $\frac{d}{dt}v = \cos(t) \Rightarrow v = \text{sen}(t)$. Por lo tanto, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\int t\cos(t)dt &= t\,\text{sen}(t) - \int \text{sen}(t)dt \\ &= t\,\text{sen}(t) + \cos(t) + k\end{aligned}$$

donde $k \in \mathbb{R}$ es una constante que depende de las condiciones iniciales.

Por lo tanto:

$$f(s) = \int_0^\infty \frac{df(t)}{dt}e^{-st}dt = \frac{f(0)}{s} + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}\frac{df(t)}{dt}dt \quad \Rightarrow \quad sf(s) = f(0) + \int_0^\infty e^{-st}\frac{df(t)}{dt}dt$$

Es decir, la transformada de Laplace de la derivada de una función $\mathcal{L}[\dot{f}(t)]$:

$$\mathcal{L}[\dot{f}(t)] = \int_0^\infty e^{-st}\frac{df(t)}{dt}dt = sf(s) - f(0)$$

donde $f(0)$ es la función $f(t)$ evaluado en $t = 0$.

Por ejemplo, sea $f(t) = e^{-at}$ para encontrar la transformada de Laplace de la derivada de $f(t)$ es:

$$\mathcal{L}[\dot{f}(t)] = \mathcal{L}[\frac{d}{dt}e^{-at}] = sf(s) - f(0) = s\frac{1}{s+a} - 1 = -\frac{a}{s+a}$$

Transformada de Laplace de la integral de una función

La transformada de la Laplace de la integral de una función $f(t)$ se encuentra representada por $\mathcal{L}[\int_0^t f(t)dt]$ la cual se obtiene de la siguiente forma. Considere la transformada de Laplace $\mathcal{L}[f(t)]$

$$f(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)\ e^{-st}dt$$

Considere integración por partes:

$$f(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)\ e^{-st}dt = \int_0^\infty udv = uv\Big|_0^\infty - \int_0^\infty vdu$$

donde $u = e^{-st}$, $du = -se^{-st}dt$ y $dv = f(t)dt$.

Si integramos a $dv = f(t)dt$, obtenemos:

$$dv = f(t)dt \Rightarrow \int_0^t dv = \int_0^t f(t)dt \Rightarrow v(t) = v(0) + \int_0^t f(t)dt$$

donde $v(0)$ corresponde al valor de la integral $f(t)$ en $t = 0$.

Ahora

$$f(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)\ e^{-st}dt = \int_0^\infty udv = uv\Big|_0^\infty - \int_0^\infty vdu$$

$$= \left\{ e^{-st} \left[v(0) + \textstyle\int_0^t f(t)dt \right] \right\} \Bigg|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \left[v(0) + \textstyle\int_0^t f(t)dt \right] \; (-se^{-st}dt)$$

Observe que al evaluar los límites del primer término de la expresión anterior $\left\{ e^{-st} \left[v(0) + \int_0^t f(t)dt \right] \right\} \Bigg|_0^{\infty} =$ $-v(0)$. Por lo tanto $f(s)$ se reduce a:

$$\begin{aligned} f(s) = \mathcal{L}[f(t)] &= -v(0) + \int_0^{\infty} \left[v(0) + \textstyle\int_0^t f(t)dt \right] se^{-st} dt \\ &= -v(0) + s \int_0^{\infty} v(0)e^{-st}dt + s \int_0^{\infty} \left[\textstyle\int_0^t f(t)dt \right] e^{-st}dt \end{aligned}$$

donde s permanece constante sobre el intervalo de integración. Note que la primera integral del lado derecho del signo igual corresponde a la transformada de Laplace de una constante $\mathcal{L}[v(0)]$, la cual es igual al producto de la constante $v(0)$ por $\frac{1}{s}$.

Lo que resulta la siguiente expresión:

$$f(s) = \mathcal{L}[f(t)] = -\cancel{v(0)} + \cancel{s\frac{v(0)}{s}} + s \int_0^{\infty} \left[\textstyle\int_0^t f(t)dt \right] e^{-st}dt = s \int_0^{\infty} \left[\textstyle\int_0^t f(t)dt \right] e^{-st}dt$$

Por lo tanto, la transformada de Laplace de la integral de $f(t)$ adquiere la forma: $\mathcal{L}[\int_0^t f(t)dt] = \frac{f(s)}{s}$. Nótese que la integral $\int_0^t f(t)dt$ tiene límites de integración, es decir es una integral definida; al eliminar los límites de integración deberá aparecer una constante de integración la cual es el valor de la integral de $f(t)$ en $t = 0$, en consecuencia:

> La transformada de Laplace de la integral de una función $f(t)$ considerando las condiciones iniciales se obtiene como:
>
> $$\mathcal{L}[\int f(t)dt] = \frac{f(s)}{s} + \frac{v(0)}{s}$$
>
> donde $v(0) = \int_0^t f(t)dt \Bigg|_{t=0}$ es el valor resultante de la integral de $f(t)$ evaluada en $t = 0$.

No confundir a $v(0)$ con el valor de la función $f(0)$ en $t = 0$. En tal caso son variables y valores diferentes.

Transformada de Laplace de la función rampa

Considere la función rampa $f(t)$, la transformada de Laplace $\mathcal{L}[t]$ se obtiene de la siguiente forma:

$$f(s) = \mathcal{L}[t] \;=\; \int_0^{\infty} t\ e^{-st}dt$$

realizando la integración por partes $\int udv = uv - \int vdu$ bajo la siguiente notación: $u = t \Rightarrow du = dt$, $dv = e^{-st}dt \Rightarrow v = \int e^{-st}dt = -\frac{1}{s}e^{-st}$. De acuerdo con esto, el desarrollo de la transformada de Laplace de una función rampa $\mathcal{L}[t]$ toma la siguiente forma:

$$f(s) \;=\; \int_0^{\infty} t\ e^{-st}dt = \{-t\,[\,\tfrac{1}{s}e^{-st}\,]\}\Big|_{t=0}^{t=\infty} - \int_0^{\infty} [\,\tfrac{-1}{s}e^{-st}\,]\,dt$$

Note que $\{-t\,[\,\frac{1}{s}e^{-st}\,]\}\Big|_{t=0}^{t=\infty} = \underbrace{-\infty\,[\,\tfrac{1}{s}\ \cancel{e^{-\infty}}^{\,0}\,]}_{-\infty\times 0=0} + 0\,[\,\tfrac{1}{s}\cancel{e^{-0}}^{\,1}\,] = 0$. Por lo que el álgebra de la transformada de Laplace de una función rampa $\mathcal{L}[t]$ se reduce a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} f(s) = \int_0^{\infty} t\ e^{-st}dt \;&=\; -\int_0^{\infty} \frac{-1}{s}e^{-st}dt \\ &=\; -\frac{1}{s^2}e^{-st}\Big|_{t=0}^{t=\infty} = -\frac{1}{s^2}\,[\,\cancel{e^{-\infty}}^{\,0} - \cancel{e^{-0}}^{\,1}\,] = \frac{1}{s^2} \end{aligned}$$

La transformada de Laplace de una función rampa $\mathcal{L}[t]$ está dada por:

$$\mathcal{L}[t] \;=\; \int_0^{\infty} t\ e^{-st}dt = \frac{1}{s^2}$$

Tabla 8.1 Transformada de Laplace de algunas funciones elementales.

	Función	Transformada de Laplace
	$f(t)$	$f(s)=\mathcal{L}[f(t)]$
1	1	$\frac{1}{s}$
2	α	$\frac{\alpha}{s}$
3	t	$\frac{1}{s^2}$
4	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
5	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
6	e^{iwt}	$\frac{1}{s-iw}$
7	e^{-iwt}	$\frac{1}{s+iw}$
8	$\text{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
9	$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
10	$\text{senh}(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
11	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
12	$e^{(\alpha+iw)t}$	$\frac{1}{s-\alpha-iw}$
13	$e^{(\alpha-iw)t}$	$\frac{1}{s-\alpha+iw}$
14	$e^{-\alpha t}\text{sen}(wt)$	$\frac{w}{(s+\alpha)^2+w^2}$
15	$e^{-\alpha t}\cos(wt)$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+w^2}$

Propiedades de la transformada de Laplace

La transformada de Laplace $\mathcal{L}[f(t)]$ posee varias propiedades matemáticas entre las que destacan:

- **Linealidad:** sean $f_1(t), f_2(t), \cdots, f_n(t)$ un conjunto de funciones continuas en el tiempo, entonces la transformada de una suma de términos de funciones $f_i(t)$ con $i=1,2,\cdots,n$ es igual a la suma de las transformadas de los términos individuales: $\mathcal{L}[f_1(t)+f_2(t)+\cdots+f_n(t)]=\mathcal{L}[f_1(t)]+\mathcal{L}[f_2(t)]+\cdots+\mathcal{L}[f_n(t)]$.

- Sea $\alpha\in\mathbb{R}$ un escalar constante, entonces $\mathcal{L}[\alpha f(t)]=\alpha\mathcal{L}[f(t)]$.

Tabla 8.2 Transformada de Laplace de derivadas e integrales.

	Operación	Transformada de Laplace $f(s) = \mathcal{L}[f(t)]$
1	$\dot{f}(t) = \frac{d}{dt}f(t)$	$sf(s) - f(0)$ donde $f(0)$ es la función $f(t)$ evaluada en $t = 0$.
2	$\ddot{f}(t) = \frac{d}{dt}\frac{d}{dt}f(t)$	$s^2 f(s) - sf(0) - \dot{f}(0)$ donde $f(0)$ y $\dot{f}(0)$ representan la función $f(t)$ y la derivada $\dot{f}(t)$, respectivamente evaluadas en $t = 0$.
3	$\int f(t)dt$	$\frac{f(s)}{s} + \frac{v(0)}{s}$ donde $v(0) = \int f(t)dt\Big\vert_{t=0}$ es el valor de la integral resultante de la función $f(t)$ en $t = 0$.

- Suponga que $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ son un conjunto de escalares constantes en el tiempo, entonces $\mathcal{L}[\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) + \cdots + \alpha_n f_n(t)] = \alpha_1 \mathcal{L}[f_1(t)] + \alpha_2 \mathcal{L}[f_2(t)] + \cdots + \alpha_n \mathcal{L}[f_n(t)]$.

- **Desplazamiento en la frecuencia:** $\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = f(s - a)$.

- La transformada de Laplace de la **segunda derivada temporal** de una función $f(t) : \frac{d^2}{dt^2}f(t) = \ddot{f}(t)$ es: $\mathcal{L}[\ddot{f}(t)] = s^2 f(s) - sf(0) - \dot{f}(0)$, donde $f(0)$ y $\dot{f}(0)$ representan la función $f(t)$ y la derivada $\dot{f}(t)$, ambas evaluadas en $t = 0$.

- **Escalamiento**: la transformada de Laplace $\mathcal{L}[f(at)]$ para $a \in \mathbb{R}$ es un escalar con $a \neq 0$, satisface $\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} f(\frac{s}{a})$.

8.2 Aplicaciones de la transformada de Laplace

En circuitos eléctricos es muy útil emplear la transformada de Laplace para realizar el análisis de mallas, por ejemplo considere la figura 8.1 donde se presenta un filtro pasa bajas pasivo.

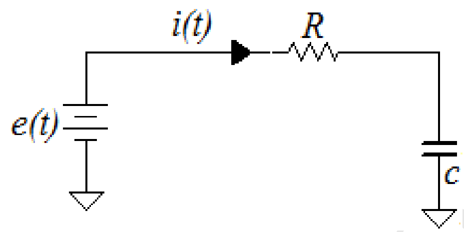


Figura 8.1 Filtro pasa bajas pasivo.

La ecuación que gobierna dicho filtro es la siguiente:

$$e(t) \quad = \quad Ri(t) + \frac{1}{c}\int_0^t i(t)dt$$

donde $e(t)$ es el voltaje de alimentación de la batería, $i(t)$ es la corriente que circula por el circuito, R es la resistencia eléctrica y c es el capacitor.

Aplicando la transformada de Laplace y suponiendo condiciones iniciales cero en el capacitor c se obtiene:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[e(t)] &= \mathcal{L}[Ri(t)] + \mathcal{L}[\frac{1}{c}\int_0^t i(t)dt] \\
&= R\mathcal{L}[i(t)] + \frac{1}{c}\mathcal{L}[\int_0^t i(t)dt] \\
e(s) &= Ri(s) + \frac{i(s)}{cs} \\
&= [\,R + \tfrac{1}{cs}\,]\, i(s)
\end{aligned}$$

Por lo que la función de transferencia que relaciona el voltaje aplicado $e(s)$ con la corriente que fluye por el circuito $i(s)$ es:

$$\frac{i(s)}{e(s)} \quad = \quad \frac{1}{R + \frac{1}{cs}} = \frac{1}{R}\frac{s}{s + \frac{1}{cR}}$$

Suponga que tiene un sistema masa resorte amortiguador como el que se muestra en la figura 8.2, el modelo dinámico que describe el comportamiento de este sistema está dada por la siguiente ecuación diferencial:

$$f(t) = m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t)$$

donde m es la masa del bloque rígido, k es la constante de rigidez del resorte, b es el coeficiente de fricción interna del sistema, $\ddot{x}(t), \dot{x}(t), x(t)$, representan respectivamente la aceleración, velocidad y desplazamiento lineal del sistema.

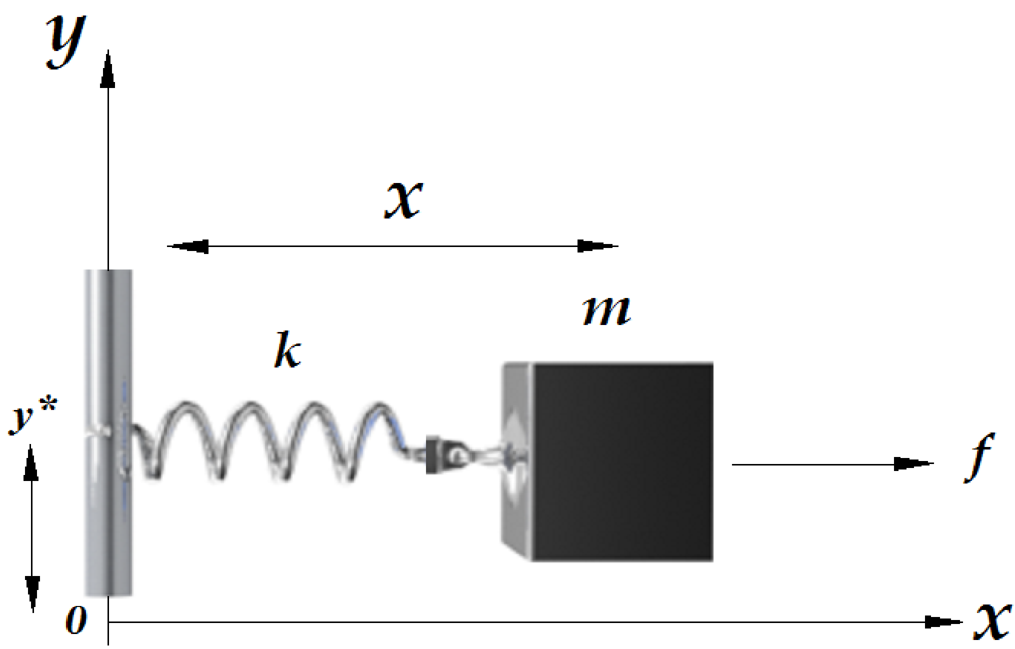


Figura 8.2 Sistema masa resorte horizontal.

Aplicando la transformada de Laplace y suponiendo condiciones iniciales cero se obtiene la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)] &= \mathcal{L}[m\ddot{x}(t)] + \mathcal{L}[b\dot{x}(t)] + \mathcal{L}[kx(t)] \\ f(s) &= m\mathcal{L}[\ddot{x}(t)] + b\mathcal{L}[\dot{x}(t)] + k\mathcal{L}[x(t)] \\ &= ms^2x(s) + bsx(s) + kx(s) \\ &= (\, ms^2 + bs + k\,)\, x(s) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función de transferencia que relaciona la fuerza aplicada $f(s)$ con el desplazamiento del sistema $x(s)$ está dada por:

$$\frac{x(s)}{f(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$

Considere la siguiente ecuación diferencial de primer orden:

$$\dot{x}(t) = -ax(t) + bu(t)$$

donde $a, b \in \mathbb{R}_+$ y $x(t) \in \mathbb{R}$ es la variable de estado del sistema y $u(t) \in \mathbb{R}$ es la señal de entrada. Obtener la función de transferencia $G(s) = \frac{x(s)}{u(s)}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\dot{x}(t)] &= \mathcal{L}[-ax(t)] + \mathcal{L}[bu(t)] \\
&= -a\mathcal{L}[x(t)] + b\mathcal{L}[u(t)] \\
sx(s) &= -ax(s) + bu(s) \\
(\, s + a \,)\, x(s) &= bu(s) \\
G(s) &= \frac{x(s)}{u(s)} = \frac{b}{s+a}
\end{aligned}$$

Obtener la función de transferencia $G(s) = \frac{y(s)}{u(s)}$ de la siguiente ecuación:

$$5\ddot{y}(t) + 23\dot{y}(t) + 5y(t) = 4u(t)$$

Aplicando la transformada de Laplace y suponiendo condiciones iniciales cero, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[5\ddot{y}(t)] + \mathcal{L}[23\dot{y}(t)] + \mathcal{L}[5y(t)] &= \mathcal{L}[4u(t)] \\
5\mathcal{L}[\ddot{y}(t)] + 23\mathcal{L}[\dot{y}(t)] + 5\mathcal{L}[y(t)] &= 4\mathcal{L}[u(t)] \\
5s^2y(s) + 23sy(s) + 5y(s) &= 4u(s) \\
(\, 5s^2 + 23s + 5 \,)\, y(s) &= 4u(s)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la función de transferencia $G(s) = \frac{y(s)}{u(s)}$ tiene la siguiente forma:

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{4}{5s^2 + 23s + 5}$$