Capítulo 21

Las Matemáticas de la Termodinámica, Cinética y Electroquímica

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

En todos los problemas relativos a jacobianos, mientras no se diga nada explícitamente, se suponen que las variables independientes son P, V, T y S. Recuerde la equivalencia $J(P,V) = J(T,S)$ así como si u y v son variables independientes $J(u,v) = -J(v,u) = 1$ y $J(x,x) = 0$; $J(k,x) = k\,(k \equiv \text{constante})$; $J(x,y) - (J(y,-x) = J(-y,x) - J(y,x)$

21.68 Solución: $TJ(P,S) - PJ(P,V)$

21.69 Solución: $TJ(P,S)$

21.70 Solución: $-SJ(P,T) - P(P,V)$

21.71 Solución: $-SJ(P,T)$

21.72 Solución: $TJ(P,S)$

21.73 Solución: $PJ(P,V)$

21.74 Solución: $TJ(V,S)$

21.75 Solución: $TJ(V,S) - VJ(P,V)$

21.76 Solución: $-SJ(V,T)$

21.77 Solución: $-SJ(V,T) - VJ(P,V)$

21.78 Solución: $TJ(V,S)$

21.79 Solución: 0

21.80 Solución: $TJ(P,V) + PJ(V,T)$

21.81 Solución: $TJ(P,V) - VJ(P,T)$

21.82 Solución: $PJ(V,T)$

21.83 Solución: $PJ(V,T)$

21.84 Solución: $-VJ(P,T)$

21.85 Solución: $TJ(P,V)$

21.86 Solución: $-PJ(V,T)$

21.87 Solución: $PJ(V,S)$

21.88 Solución: $-VJ(P,S)$

21.89 Solución: $SJ(P,V)+PJ(V,S)$

21.90 Solución: $SJ(P,V)-VJ(P,S)$

21.91 Solución: 0

21.92 Solución: $-PJ(V,S)$

21.93 Solución: $-P(TJ(V,S)-VJ(P,V)$

21.94 Solución: $PJS(V,T)$

21.95 Solución: $P(SJ(V,T)+VJ(P,V)$

21.96 Solución: $-PTJ(V,S)$

21.97 Solución: $-PTJ(V,S)$

21.98 Solución: $T(SJ(P,V)+PJ(V,S))-V(SJ(P,T)+PJ(P,V))$

21.99 Solución: $T(SJ(P,V)-VJ(P,S)-VSJ(P,T)$

21.100 Solución: $TVJ(P,S)$

21.101 Solución: $P(VJ(P,V)-TJ(V,S)$

21.102 Solución: $SVJ(P,T)+(P(SJ(V,T)+VJ8P,V)$

21.103 Solución: $-T(SJ(P,V)-PJ(V,S)$

21.104 Solución: $PSJ(V,T)$

21.105 Solución: $T(VJ(P,S)-SJ(P,V)$

21.106 Solución: $P(SJ(V,T)+VJ(P,V))$

21.107 Solución: $-PTJ(V,S)$

21.108 Solución: Como senh x $=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ tenemos $\frac{d}{dx}(\text{senh})\,x=\frac{e^x-(-)e^{-x}}{2}=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\cosh x$

21.109 Solución: $\frac{d}{dx}(\cosh x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\text{senh}\,x.$

21.110 Solución: $\frac{d}{dx}\tanh x=\frac{d}{dx}\left(\frac{\text{senh}\,x}{\cosh x}\right)=\frac{\cosh x\cdot\cosh x-\text{senh}\,x\cdot\text{senh}\,x}{\cosh^2 x}=\frac{\cosh^2 x-\text{senh}^2 x}{\cosh^2 x}=\frac{1}{\cosh^2 x}=\text{sech}^2\,x.$

21.111 Solución: $\frac{d}{dx}\left(\text{csch}\,x\right)=-\text{csch}\,x\coth x.$

21.112 Solución: $\frac{d}{dx}\left(\text{sech}\,x\right)=-\text{sech}\,x\tanh x.$

21.113 Solución: $\frac{d}{dx}(\coth x) = -\text{csch}^2\, x$.

21.114 Solución: $\text{senh}\, 2x = \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2} = 2 \cdot \frac{(e^x-e^{-x})(e^x+e^{-x})}{2\cdot 2} = 2 \cdot \frac{e^x-e^{-x}}{2}\frac{e^x+e^{-x}}{2} = 2 \cdot \text{senh}\, x \cosh x$.

21.115 Solución: $\frac{2}{\text{senh}\,(2x)} = \frac{2}{2\text{senh}\, x \cosh x} = \frac{1}{\text{senh}\, x \cosh x} = \frac{\cosh^2 x - \text{senh}^2\, x}{\text{senh}\, x \cosh x} = \frac{\cosh x}{\text{senh}\, x} - \frac{\text{senh}\, x}{\cosh x}$.

21.116 Solución: Si $y = \text{senh}^{-1}\, x$, entonces $x = \text{senh}\; y$, es decir, $x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$, por tanto $e^y - 2x - e^{-y} = 0$ y multiplicando por e^y, $e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$, ecuación de segundo grado, cuyas soluciones son $e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2+4}}{2} = \frac{2x \pm 2\sqrt{x^2+1}}{2} = x \pm \sqrt{x^2+1}$. Con lo que tomando logaritmos neperianos en ambos miembros, teniendo en cuenta que la raíz negativa implicaría una solución compleja, tenemos, $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

21.117 Solución: Si $y = \cosh^{-1}\, x$, entonces $x = \cosh\; y$, es decir, $x = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$, por tanto $e^y - 2x + e^{-y} = 0$ y multiplicando por e^y, $e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0$, ecuación de segundo grado, cuyas soluciones son $e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2-4}}{2} = \frac{2x \pm 2\sqrt{x^2-1}}{2} = x \pm \sqrt{x^2-1}$. Con lo que tomando logaritmos neperianos, tenemos, $y = \ln(x \pm \sqrt{x^2-1})$, válida siempre y cuando $x \geq 1$.

21.118 Solución: En la Figura 21.7 incluimos una ilustración gráfica de la transformación de Legendre, donde podemos ver que las ordenadas de los puntos se han transformado mediante la expresión $g(x_i) = f(x_i) - x_i f'(x_i)$, por lo que ocupan otra posición diferente en el eje de ordenadas.

21.119 Solución: Como la ecuación de una circunferencia centrada en el origen y de radio unidad viene dada por $x^2 + y^2 = r^2$, $y = \pm\sqrt{1-x^2}$. De forma que la transformada de Legendre es $g(x_i) = \sqrt{1-x_i^2} - x_i \left(\frac{-x_i}{\sqrt{1-x_i^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x_i^2}} = \frac{1}{f(x_i)} = \frac{1}{y}$. En la Figura 21.8 se incluye la gráfica de la función y de la transformada de Legendre, superponiendo las dos escalas diferentes del eje de ordenadas de ambas funciones.

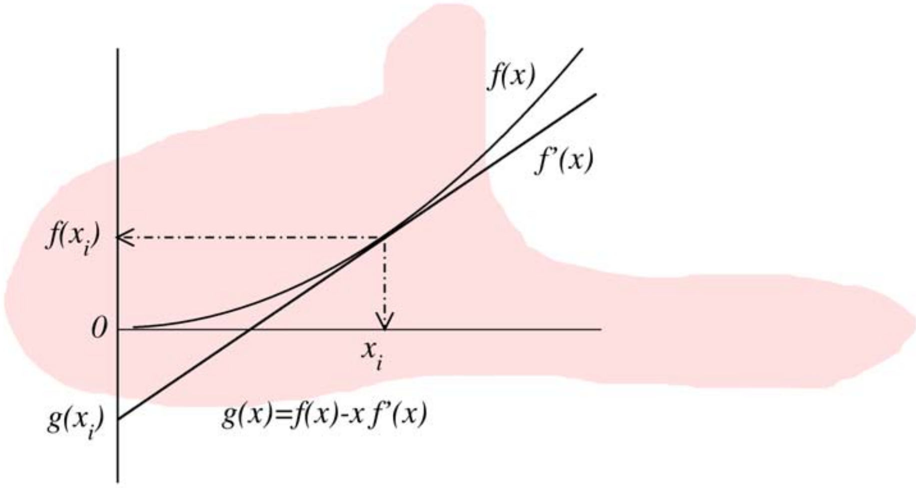

Figura 21.7 Transformación de Legendre.

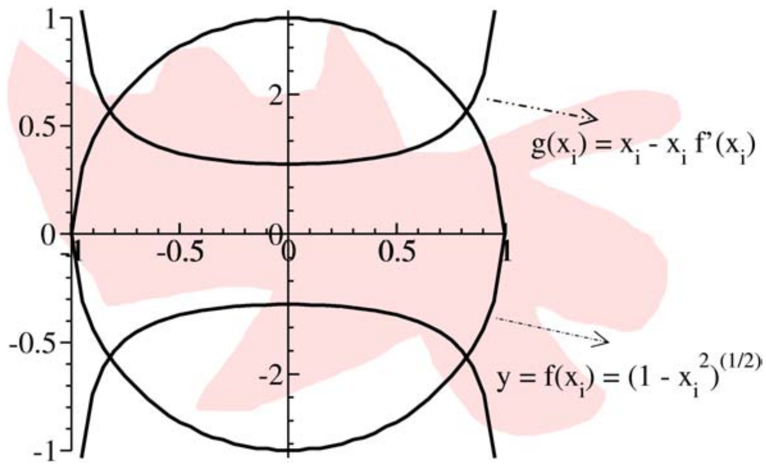

Figura 21.8 Transformación de Legendre de una circunferencia.