Capítulo 1

Nota: Las ecuaciones, figuras y problemas citados en el desarrollo de los problemas de este capítulo que no contengan "W" en su referencia corresponden al libro impreso.

Problema 1.2.W1 En el manómetro de la figura 1.W1, la sección transversal del tubo es A, el fluido ocupa una longitud L a lo largo del tubo, su coeficiente de rozamiento con las paredes es μ (N/m^2)/(m/s) y su densidad es ρ. ¿Cuál es la función de transferencia que relaciona la altura de la columna de fluido con la presión aplicada?

Palabras clave: *manómetro, función de transferencia.*

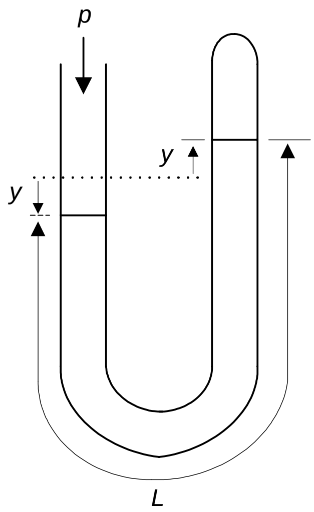

Figura 1.W1 Manómetro en U

Cuando no hay presión aplicada, la altura del fluido a cada lado del tubo es la misma. Cuando se aplica una presión p, la columna de la izquierda desciende y la de la derecha asciende en igual magnitud, y. La fuerza que debe comunicar el sistema que aplica la presión debe vencer el rozamiento con las paredes y el peso de la columna desplazada, y debe acelerar la masa desplazada. Así pues,

$$pA = 2yA\rho g + \mu A\frac{dy}{dt} + AL\rho\frac{d^2y}{dt^2}$$
$$p = 2y\rho g + \mu\frac{dy}{dt} + L\rho\frac{d^2y}{dt^2}$$

Si se aplica la transformada de Laplace a la última ecuación, resulta

$$\frac{Y(s)}{P(s)} = \frac{1}{2\rho g + \mu s + L\rho s^2} = \frac{1}{2\rho g}\frac{2g/L}{s^2 + \frac{\mu}{L\rho}s + \frac{2g}{L}}$$

Si se identifican términos con la ecuación de un sistema paso bajo de segundo orden, obtenemos $k = 1/(2\rho g)$, $\omega = (2g/L)^{1/2}$ y $\zeta = (\mu/2\rho)(2Lg)^{-1/2}$. Para aumentar la sensibilidad se puede emplear un líquido de baja densidad (agua en vez de mercurio). Para aumentar el amortiguamiento interesa también un líquido de baja densidad y un rozamiento elevado, que se puede conseguir estrechando el tubo. Para aumentar el ancho de banda, el tubo debe ser corto.

Comentarios:

1. La respuesta es de segundo orden y por lo tanto queda descrita con tres parámetros, pero no hay una correspondencia biunívoca entre cada parámetro y un elemento físico distinto. La densidad, por ejemplo, influye tanto en la sensibilidad estática como en el amortiguamiento.
2. Al diseñar el manómetro, además de los parámetros analizados, hay que considerar otros factores, como por ejemplo la dificultad de fabricación de un tubo capilar regular, o la posibilidad de medir el desplazamiento y con un sensor electrónico.

Problema 1.2.W2 Se desea sustituir un sensor cuya respuesta dinámica es de primer orden, por otro de segundo orden que mejore la respuesta en frecuencia. Para caracterizar el sensor de primer orden se le aplica una entrada en escalón y se mide el tiempo hasta que la salida alcanza el 90 % del valor final, que es de 25 ms. Para el sensor de segundo orden se desea que tenga una frecuencia natural nominal igual a la frecuencia de corte del primero, y que la desviación relativa de su sensibilidad dinámica a dicha frecuencia sea inferior al 10 %. ¿Cuál debe ser la frecuencia natural y qué valor debe tener el coeficiente de amortiguamiento del nuevo sensor? ¿Cuáles son la frecuencia de resonancia y la desviación de sensibilidad a dicha frecuencia?

Palabras clave: *sensibilidad dinámica, desviación relativa, sistema de primer orden, sistema de segundo orden, resonancia.*

Primero calcularemos la frecuencia de corte del sensor de primer orden a partir de su respuesta a un escalón. Después determinaremos el coeficiente de amortiguamiento del sensor de segundo orden a partir de la amplitud de la respuesta a dicha frecuencia. En el problema 1.2.8 se ha demostrado que

$$t_{90} = -\tau \ln(1-0,9) = 2,3\tau$$

Por lo tanto,

$$\tau = \frac{25 \text{ ms}}{2,3} = 10,9 \text{ ms}$$
$$f_\text{c} = \frac{1}{2\pi\tau} = \frac{1}{2\pi(10,9 \text{ ms})} = 14,6 \text{ Hz}$$

Para un sensor de segundo orden, de acuerdo con los resultados obtenidos en el problema 1.2.10, la respuesta a la frecuencia natural será

$$\frac{Y(\omega_n)}{X(\omega_n)} = k\frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega_n^2 + j2\zeta\omega_n\omega_n} = \frac{k}{j2\zeta}$$

Según el enunciado, la amplitud de esta respuesta debe cumplir la condición

$$0{,}9k < \frac{k}{2\zeta} < 1{,}1k$$

que lleva a $0{,}45 < \zeta < 0{,}55$.

Según la ecuación (1.11), la frecuencia de resonancia dependerá de ζ y estará comprendida entre $0{,}62f_n$ y $0{,}77f_n$. Dado que elegimos $f_n = f_c = 14{,}6$ Hz, tendremos 9 Hz $< f_r <$ 11 Hz.

Según el problema 1.2.10, la amplitud de la respuesta a la frecuencia de resonancia es

$$\left|\frac{Y(\omega_r)}{X(\omega_r)}\right| = \frac{k}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

de manera que para el margen de valores aceptable para ζ tendremos una amplitud en el pico de resonancia en el margen siguiente:

$$1{,}235k > A_r > 1{,}082k$$

Es decir, la desviación relativa de la sensibilidad dinámica a la frecuencia de resonancia estará comprendida entre el 8 % y el 23,5 %.

Comentarios:

1. Una respuesta de segundo orden puede tener una desviación de sensibilidad dinámica inferior a la de una respuesta de primer orden cuya frecuencia de corte sea igual a la frecuencia natural del primero.
2. Dado que la frecuencia de resonancia es siempre inferior a la frecuencia natural, la imposición de un criterio de desviación máxima a la frecuencia natural no es suficiente para garantizar una desviación máxima de sensibilidad dinámica pequeña para las frecuencias inferiores. Para garantizar una desviación pequeña de la sensibilidad dinámica para entradas sinusoidales hay que elegir $\zeta=\sqrt{2}/2$.
3. Aunque el enunciado habla del tiempo de subida hasta el 90 %, muchas veces se habla del tiempo de subida del 10 % hasta el 90 %. En aquellos sistemas donde la zona inicial de la subida de la salida cuando la entrada es un escalón puede tener alguna distorsión, si se mide a partir del 10 % del valor final, se evita dicha fase inicial.

Problema 1.2.W3 Para calibrar un acelerómetro lineal se coloca en una plataforma centrífuga horizontal de radio R cuya velocidad de giro, que es ajustable, viene indicada (en revoluciones por minuto) en un panel de 4 dígitos. Si la incertidumbre en la medida de la velocidad angular n es inferior a la incertidumbre en la lectura del panel (±1 "cuenta") y la incertidumbre en la medida de la posición r del acelerómetro es de ±1 bit ¿con cuántos bits hay que medir la posición para que la incertidumbre relativa en la aceleración sea debida por partes iguales a la medida de dicha posición y a la medida de la velocidad de rotación cuando el panel indique 3000 r/min?

Palabras clave: *magnitudes derivadas, propagación de incertidumbre.*

La aceleración centrífuga será $a = n^2 r$. Dado que la incertidumbre en la velocidad y en la posición no están correlacionadas, según la ecuación (1.19) tendremos

$$u^2(a) = \left(\frac{\partial a}{\partial n}\right)^2 u^2(n) + \left(\frac{\partial a}{\partial r}\right)^2 u^2(r)$$

Dado que

$$\frac{\partial a}{\partial n} = 2nr \text{ y } \frac{\partial a}{\partial r} = n^2$$

será

$$u^2(a) = (2nr)^2 u^2(n) + \left(n^2\right)^2 u^2(r)$$

Dividiendo ambos miembros por a^2 para calcular la incertidumbre relativa, resulta

$$\frac{u^2(a)}{a^2} = \left(\frac{2nr}{n^2 r}\right)^2 u^2(n) + \left(\frac{n^2}{n^2 r}\right)^2 u^2(r) = 4\frac{u^2(n)}{n^2} + \frac{u^2(r)}{r^2}$$

Por lo tanto, la incertidumbre relativa en la medida de la velocidad angular tiene doble repercusión que la incertidumbre en la medida de la posición. Si para ésta empleamos un sistema con x bits, para cumplir la condición del enunciado cuando n = 3000 r/min necesitamos

$$2\frac{u(n)}{n} = \frac{u(r)}{r}$$
$$2\frac{1}{3000} = \frac{1}{2^x}$$

que exige x = 10,55 bits. Necesitaríamos un sistema de por lo menos 11 bits.