CINEMÁTICA Y DINÁMICA DE ROBOTS MANIPULADORES: RESPUESTAS DE EJERCICIOS UNIDAD 05

Roger Miranda Colorado

23 de mayo de 2016

Índice

1. RESPUESTAS DE EJERCICIOS UNIDAD 05

A continuación se presentan las respuestas a los ejercicios planteados en la Unidad 5 del libro Cinemática y Dinámica de Robots Manipuladores.

Es importante tomar en cuenta que las respuestas propuestas son una posibilidad, aunque pueden existir otros métodos de solución y respuestas que pueden seguir siendo válidas.

Ejercicio 1 *¿Qué son las ecuaciones dinámicas y cuáles son dos tipos de problemas en los cuales se pueden aplicar?.*

Solución 1 *Se trata de un conjunto de ecuaciones que permiten describir el movimiento de un sistema, como el caso de un sistema robótico. Dichas ecuaciones permiten describir el movimiento de dicho sistema a partir de los pares o fuerzas ejercidos por los actuadores o por las fuerzas externas que le son aplicadas. Los problemas en los que se pueden aplicar dichas ecuaciones pueden ser: de control y de simulación.*

Ejercicio 2 *¿Qué es el tensor de inercia y para qué puede ser empleado?.*

Solución 2 *Es una matriz que permite caracterizar la inercia rotacional de un cuerpo rígido. Entre sus aplicaciones se encuentra el cálculo de energía cinética, momento de impulso y es parte fundamental para la determinación de las ecuaciones dinámicas de un robot manipulador.*

Ejercicio 3 *¿Cuál es la ventaja del uso de las ecuaciones de Newton-Euler?.*

Solución 3 *Su ventaja radica en que se trata de un procedimiento iterativo que puede ser programado fácilmente en una computadora para obtener las ecuaciones dinámicas de un sistema.*

Ejercicio 4 *¿Cuál es la ventaja del uso de las ecuaciones de Euler-Lagrange en lugar de las ecuaciones de Newton-Euler?.*

Solución 4 *La ventaja es que estas ecuaciones manejan una cierta estructura que permite comprender al sistema que se está analizando. Por ejemplo, empleando las ecuaciones EL es posible distinguir los términos correspondientes a los pares gravitacionales, fuerzas centrífugas y de Coriolis.*

Ejercicio 5 *Indique qué son las coordenadas generalizadas y a qué corresponden de modo general en un robot manipulador.*

Solución 5 *Se trata de un conjunto r de coordenadas q_k, $k = 1, ..., r$, linealmente independientes que, junto con las restricciones de un sistema, permiten especificar unívocamente la configuración de un sistema de r grados de libertad.*

Ejercicio 6 *¿Qué indica el principio del trabajo virtual?.*

Solución 6 *Indica que el trabajo realizado por las fuerzas externas correspondientes a cualquier conjunto de desplazamientos virtuales es cero.*

Ejercicio 7 *¿Qué indica el principio de D'Alembert?.*

Solución 7 *Establece que si se introduce una fuerza ficticia adicional $-\dot{\mathbf{p}}_i$ en un cuerpo que no se encuentra en equilibrio, siendo $\mathbf{p}_i$ el momento correspondiente a la partícula i, entonces cada partícula i estará en equilibrio.*

Ejercicio 8 *Sea el prisma de la Fig. 1. Determinar el tensor de inercia con respecto al sistema de referencia $\{1\}$.*

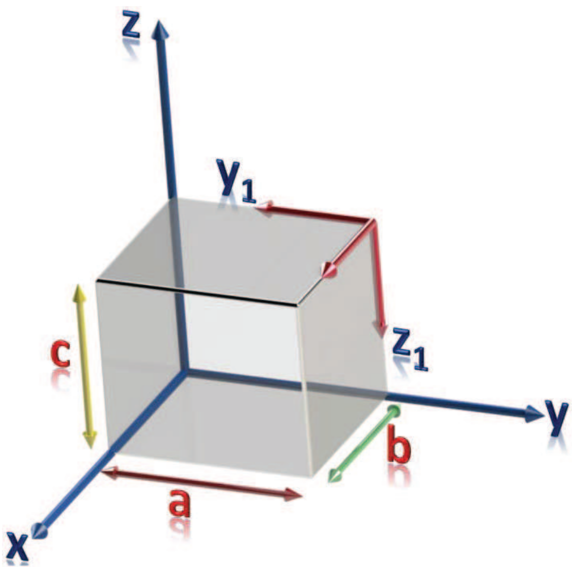

Figura 1: Cálculo del tensor de inercia para un prisma.

Solución 8 *En el ejercicio desarrollado en el Capítulo 5 se obtuvo el tensor de inercia en el centro de masa del prisma. Considérese un sistema de referencia $\{0\}$ con ejes paralelos a los del sistema $\{xyz\}$ mostrado en la figura. Entonces:*

$$\mathbf{I}^0 = \begin{pmatrix} \frac{m\left(a^2+c^2\right)}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m\left(b^2+c^2\right)}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m\left(a^2+b^2\right)}{12} \end{pmatrix}$$

Empleando el Teorema de Steiner, sean:

$$\mathbf{p}_0^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}a \\ \frac{1}{2}c \end{pmatrix}, R_0^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

por lo que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}^1 &= R_0^1 \mathbf{I}^0 \left(R_0^1\right)^T + m\left(\left(\mathbf{p}_0^1\right)^T \mathbf{p}_0^1 I_{3\times3} - \mathbf{p}_0^1\left(\mathbf{p}_0^1\right)^T\right) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{m\left(a^2+c^2\right)}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m\left(b^2+c^2\right)}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m\left(a^2+b^2\right)}{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^T \\
&\quad + m\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}a \\ \frac{1}{2}c \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}a \\ \frac{1}{2}c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}a \\ \frac{1}{2}c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}a \\ \frac{1}{2}c \end{pmatrix}^T\right) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}m\left(a^2+c^2\right) & -\frac{1}{4}mab & -\frac{1}{4}mbc \\ -\frac{1}{4}mab & \frac{1}{3}m\left(b^2+c^2\right) & -\frac{1}{4}mac \\ -\frac{1}{4}mbc & -\frac{1}{4}mac & \frac{1}{3}m\left(a^2+b^2\right) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Puede verificarse el resultado anterior en sentido inverso. Supóngase que se quiere determinar el tensor de inercia del prisma con respecto al sistema $\{0\}$*. Aplicando el resultado del ejercicio anterior se consideran los siguientes datos:*

$$\mathbf{p}_1^0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -b \\ a \\ c \end{pmatrix}, R_1^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ahora se emplea la ecuación de cambio de sistema de referencia, pero teniendo cuidado en la aplicación del teorema de Steiner de la siguiente manera. La fórmula obtenida para determinar el tensor de inercia con dos sistemas de referencia con distinta posición y orientación está dada por:

$$\mathbf{I}^A = R_C^A \mathbf{I}^C \left(R_C^A\right)^T + m\left(\left(\mathbf{p}_{C_1}^A\right)^T \mathbf{p}_{C_1}^A I_{3\times3} - \mathbf{p}_{C_1}^A\left(\mathbf{p}_{C_1}^A\right)^T\right)$$

donde $\mathbf{I}^C$ *es el tensor de inercia calculado en el centro de masa del cuerpo. En este caso se desea determinar dicho tensor de inercia y por lo tanto el tensor conocido es el equivalente a* $\mathbf{I}^A$*, por lo que:*

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}^0 &= R_1^0 \mathbf{I}^1 \left(R_1^0\right)^T - m\left(\left(\mathbf{p}_1^0\right)^T \mathbf{p}_1^0 I_{3\times3} - \mathbf{p}_1^0\left(\mathbf{p}_1^0\right)^T\right) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3}m\left(a^2+c^2\right) & -\frac{1}{4}mab & -\frac{1}{4}mbc \\ -\frac{1}{4}mab & \frac{1}{3}m\left(b^2+c^2\right) & -\frac{1}{4}mac \\ -\frac{1}{4}mbc & -\frac{1}{4}mac & \frac{1}{3}m\left(a^2+b^2\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&\quad - m\left(\left(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}c^2\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -b \\ a \\ c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -b \\ a \\ c \end{pmatrix}^T\right) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{m\left(a^2+c^2\right)}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m\left(b^2+c^2\right)}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m\left(a^2+b^2\right)}{12} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

lo cual comprueba los resultados obtenidos.

Ejercicio 9 *Sea el cono de la Fig. 2. Determinar I_{xx}, I_{yy} e I_{zz} para el sistema de referencia $\{1\}$.*

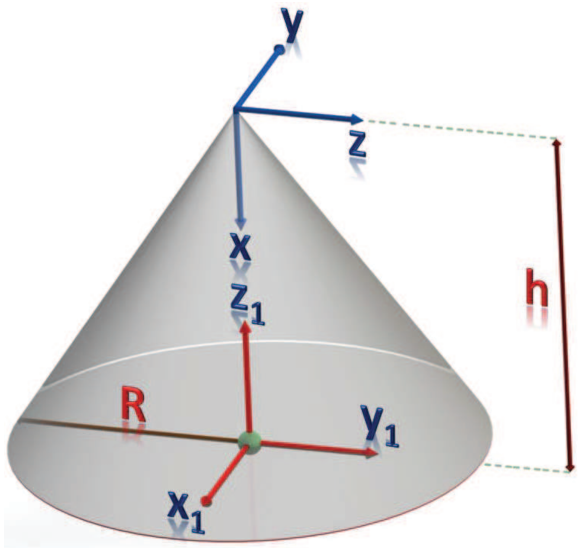

Figura 2: Cálculo de inercias para un cono.

Solución 9 *Para iniciar el problema se determinará el centro de masa del cono. Para ello, nótese que éste tiene un eje de simetría, por lo que su centro de masa debe de estar sobre dicho eje, i.e., a lo largo del eje z a una distancia z_c de la base del cono. El centro de masa del cono se determina de la siguiente manera:*

$$z_c = \frac{1}{m}\int_V z\rho dV = \frac{1}{V}\int_V z dm$$

donde ρ es la densidad del cono, m su masa y V su volumen. Considérese un disco como elemento de volumen diferencial como se indica en la Fig. 3.

De esta manera, considerando $\{1\}$ de la fig. 3, es claro que:

$$\frac{r}{h-z} = \frac{R}{h}$$

por lo que:

$$\begin{aligned}
z_c &= \frac{1}{V}\int_V z dV = \frac{1}{\frac{\pi R^2 h}{3}}\int_0^h z\left(\pi r^2 dz\right) \\
&= \frac{3}{R^2 h}\int_0^h z\left(\frac{R^2}{h^2}\left(h^2 - 2hz + z^2\right)\right) dz = \frac{3}{h^3}\int_0^h \left(h^2 z - 2hz^2 + z^3\right) dz \\
&= \frac{3}{h^3}\left(h^2\frac{z^2}{2} - 2h\frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4}\right)_0^h = \frac{3}{h^3}\left(\frac{h^4}{2} - \frac{2h^4}{3} + \frac{h^4}{4}\right) = \frac{h}{4}
\end{aligned}$$

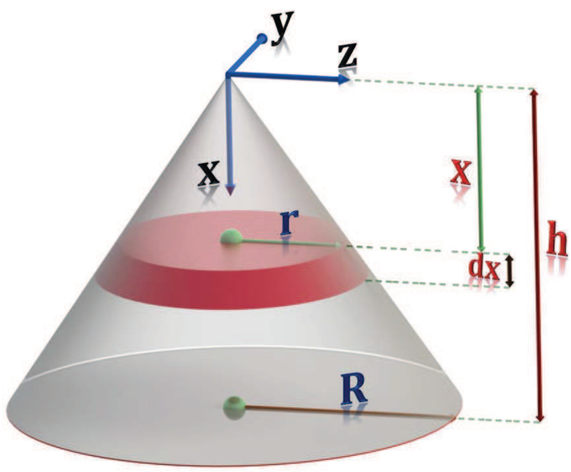

Figura 3: Elemento de masa diferencial en un cono.

y se concluye que el centro de masa del cono se encuentra en:

$$\begin{pmatrix} x_c^1 \\ y_c^1 \\ z_c^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{h}{4} \end{pmatrix}$$

Considerando ahora el centro de masa del cono, supóngase que se tiene un sistema de referencia $\{0\}$ *con origen en el centro de masa del cono y con la misma orientación que* $\{1\}$*. Se considera nuevamente un disco como elemento de volumen diferencial. Sea un sistema de referencia* $\{2\}$ *con la orientación del sistema de referencia de la parte superior de la fig. 2. Dicho tensor de inercia se calculó en el Capítulo 5 y es:*

$$\mathbf{I}^2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{10}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5}m\left(\frac{R^2}{4}+h^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5}m\left(\frac{R^2}{4}+h^2\right) \end{pmatrix}$$

Considérese ahora un sistema de referencia $\{3\}$ *con origen coincidente con* $\{2\}$*, pero con la orientación de* $\{1\}$*. Entonces:*

$$R_2^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

por lo que:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{I}^3 &= R_2^3 \mathbf{I}^2 \left(R_2^3\right)^T \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{10}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5}m\left(\frac{R^2}{4}+h^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5}m\left(\frac{R^2}{4}+h^2\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \\
&= \begin{pmatrix} \frac{3}{5}m\left(\frac{R^2}{4}+h^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5}m\left(\frac{R^2}{4}+h^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{10}mR^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Ahora sea el sistema de referencia $\{0\}$*, cuyo centro se ubica en el centro de masa del cono, con la misma orientación que* $\{3\}$*. Sea el vector* $\mathbf{p}_3^0$ *el que ubica el origen de* $\{3\}$ *con respecto a* $\{0\}$ *dado por:*

$$
\mathbf{p}_3^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3h}{4} \end{pmatrix}
$$

entonces, aplicando el Teorema de Steiner:

$$
\mathbf{I}^3 = \mathbf{I}^0 + m\left(\left(\mathbf{p}_3^0\right)^T \mathbf{p}_3^0 I_{3\times 3} - \mathbf{p}_3^0 \left(\mathbf{p}_3^0\right)^T\right)
$$

por lo que:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{I}^0 &= \mathbf{I}^3 - m\left(\left(\mathbf{p}_3^0\right)^T \mathbf{p}_3^0 I_{3\times 3} - \mathbf{p}_3^0 \left(\mathbf{p}_3^0\right)^T\right) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{3}{5}m\left(\frac{R^2}{4}+h^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5}m\left(\frac{R^2}{4}+h^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{10}mR^2 \end{pmatrix} \\
&\quad -m\left(\frac{9h^2}{16}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3h}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3h}{4} \end{pmatrix}^T\right) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{3}{20}mR^2 + \frac{3}{80}mh^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{20}mR^2 + \frac{3}{80}mh^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{10}R^2 m \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Finalmente, sea el vector $\mathbf{p}_0^1$ *el que ubica el origen de* $\{0\}$ *con respecto a* $\{1\}$ *dado por:*

$$
\mathbf{p}_0^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{h}{4} \end{pmatrix}
$$

entonces, aplicando nuevamente el Teorema de Steiner se obtiene:

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}^1 &= \mathbf{I}^0 + m\left(\left(\mathbf{p}_0^1\right)^T \mathbf{p}_0^1 I_{3\times 3} - \mathbf{p}_0^1\left(\mathbf{p}_0^1\right)^T\right) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{3}{20}mR^2 + \frac{3}{80}mh^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{20}mR^2 + \frac{3}{80}mh^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{10}R^2 m \end{pmatrix} \\
&\quad + m\left(\frac{h^2}{16}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{h}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{h}{4} \end{pmatrix}^T\right) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{3}{20}mR^2 + \frac{1}{10}mh^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{20}mR^2 + \frac{1}{10}mh^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{10}R^2 m \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Por ejemplo, suponiendo un cono de radio $R = 100\,mm$, altura de $h = 100\,mm$, de aluminio (densidad de $\rho = 2700\,kg/m^3$), su masa es de $2827.43\,g$, por lo que se obtiene:

$$\mathbf{I}^1 = \begin{pmatrix} 7.0686 \times 10^6 & 0 & 0 \\ 0 & 7.0686 \times 10^6 & 0 \\ 0 & 0 & 8.4823 \times 10^6 \end{pmatrix} g \cdot mm^2$$

y puede verificarse dicho resultado empleando algún programa computacional como SolidWorks.

Ejercicio 10 *Empleando las ecuaciones de Newton-Euler, determinar las ecuaciones dinámicas del robot manipulador mostrado en la Fig. 4.*

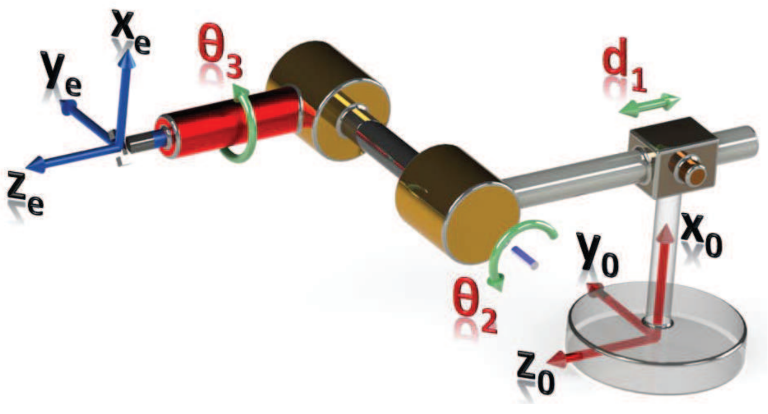

Figura 4: Robot manipulador con configuración PRR.

Solución 10 *Lo primero que se debe de realizar con el manipulador es determinar la cinemática directa. Para ello se considera la asignación de los sistemas de referencia de este manipulador se muestra en la Fig. 5.*

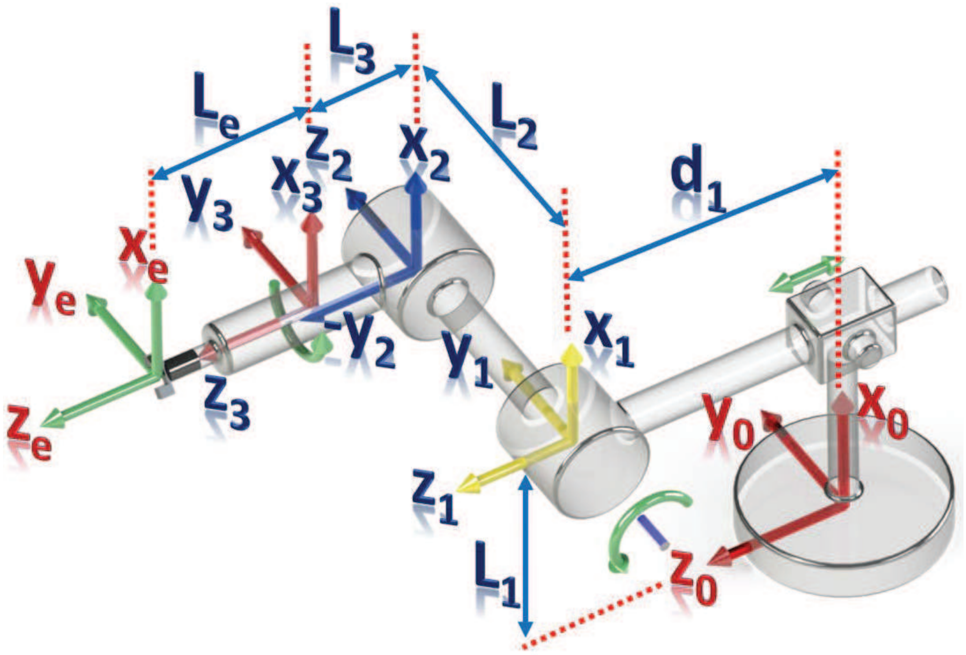

Figura 5: Asignación de sistemas de referencia.

De la asignación de sistemas de referencia se obtienen los parámetros mostrados en la Tabla 01:

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	L_1	d_1	0
2	-90	0	L_2	θ_2
3	90	0	L_3	θ_3
e	0	0	L_e	0

Tabla 01. *Parámetros cinemáticos*

De esta manera se obtienen las matrices de transformación del manipulador:

$$T_1^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & L_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, T_2^1 = \begin{pmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_2 \\ -s_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_3^2 = \begin{pmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -L_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, T_e^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_e \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El producto de las matrices de transformación permite obtener:

$$\begin{aligned}
T_2^0 &= T_1^0 T_2^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & L_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_2 \\ -s_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 1 & L_2 \\ -s_2 & -c_2 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_3^0 &= T_2^0 T_3^2 = \begin{pmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 1 & L_2 \\ -s_2 & -c_2 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -L_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c_2 c_3 & -c_2 s_3 & s_2 & L_1 + L_3 s_2 \\ s_3 & c_3 & 0 & L_2 \\ -s_2 c_3 & s_2 s_3 & c_2 & d_1 + L_3 c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_e^0 &= T_3^0 T_e^3 = \begin{pmatrix} c_2 c_3 & -c_2 s_3 & s_2 & L_1 + L_3 s_2 \\ s_3 & c_3 & 0 & L_2 \\ -s_2 c_3 & s_2 s_3 & c_2 & d_1 + L_3 c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_e \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c_2 c_3 & -c_2 s_3 & s_2 & L_1 + (L_3 + L_e)\, s_2 \\ s_3 & c_3 & 0 & L_2 \\ -s_2 c_3 & s_2 s_3 & c_2 & d_1 + (L_3 + L_e)\, c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

lo cual completa el análisis cinemático del manipulador. Ahora se emplearán las ecuaciones de Newton-Euler para articulaciones rotacionales:

$$\begin{array}{c} \textit{Iteraciones} \\ \textit{externas} \end{array} \left\{ \begin{array}{c}
\omega_{i+1}^{i+1} = R_i^{i+1} \omega_i^i + \dot{\theta}_{i+1} \mathbf{z}_{i+1}^{i+1} \\
\dot{\omega}_{i+1}^{i+1} = R_i^{i+1} \dot{\omega}_i^i + R_i^{i+1} \omega_i^i \times \dot{\theta}_{i+1} \mathbf{z}_{i+1}^{i+1} + \ddot{\theta}_{i+1} \mathbf{z}_{i+1}^{i+1} \\
\dot{\mathbf{v}}_{i+1}^{i+1} = R_i^{i+1} \left(\dot{\omega}_i^i \times \mathbf{p}_{i+1}^i + \omega_i^i \times \left(\omega_i^i \times \mathbf{p}_{i+1}^i \right) + \dot{\mathbf{v}}_i^i \right) \\
\dot{\mathbf{v}}_{C_{i+1}}^{i+1} = \dot{\omega}_{i+1}^{i+1} \times \mathbf{p}_{C_{i+1}}^{i+1} + \omega_{i+1}^{i+1} \times \left(\omega_{i+1}^{i+1} \times \mathbf{p}_{C_{i+1}}^{i+1} \right) + \dot{\mathbf{v}}_{i+1}^{i+1} \\
F_{i+1}^{i+1} = m_{i+1} \dot{\mathbf{v}}_{C_{i+1}}^{i+1} \\
N_{i+1}^{i+1} = \mathbf{I}_{i+1}^{C_{i+1}} \dot{\omega}_{i+1}^{i+1} + \omega_{i+1}^{i+1} \times \mathbf{I}_{i+1}^{C_{i+1}} \omega_{i+1}^{i+1}
\end{array} \right.$$

$$\begin{array}{c} \textit{Iteraciones} \\ \textit{internas} \end{array} \left\{ \begin{array}{c}
\mathbf{f}_i^i = R_{i+1}^i \mathbf{f}_{i+1}^{i+1} + F_i^i \\
\mathbf{n}_i^i = N_i^i + R_{i+1}^i \mathbf{n}_{i+1}^{i+1} + \mathbf{p}_{C_i}^i \times F_i^i + \mathbf{p}_{i+1}^i \times R_{i+1}^i \mathbf{f}_{i+1}^{i+1} \\
\tau_i = \left(\mathbf{n}_i^i \right)^T \mathbf{z}_i^i
\end{array} \right.$$

y para articulaciones traslacionales se emplearán las siguientes fórmulas:

$$\textit{Iteraciones externas} \begin{cases} \omega_{i+1}^{i+1} = R_i^{i+1}\omega_i^i \\ \dot{\omega}_{i+1}^{i+1} = R_i^{i+1}\dot{\omega}_i^i \\ \dot{\mathbf{v}}_{i+1}^{i+1} = R_i^{i+1}\left[\dot{\mathbf{v}}_i^i + \dot{\omega}_i^i \times \mathbf{p}_{i+1}^i + \omega_i^i \times \left(\omega_i^i \times \mathbf{p}_{i+1}^i\right)\right] + 2\omega_{i+1}^{i+1} \times \dot{d}_{i+1}\mathbf{z}_{i+1}^{i+1} + \ddot{d}_{i+1}\mathbf{z}_{i+1}^{i+1} \\ \dot{\mathbf{v}}_{C_{i+1}}^{i+1} = \dot{\omega}_{i+1}^{i+1} \times \mathbf{p}_{C_{i+1}}^{i+1} + \omega_{i+1}^{i+1} \times \left(\omega_{i+1}^{i+1} \times \mathbf{p}_{C_{i+1}}^{i+1}\right) + \dot{\mathbf{v}}_{i+1}^{i+1} \\ F_{i+1}^{i+1} = m_{i+1}\dot{\mathbf{v}}_{C_{i+1}}^{i+1} \\ N_{i+1}^{i+1} = \mathbf{I}_{i+1}^{C_{i+1}}\dot{\omega}_{i+1}^{i+1} + \omega_{i+1}^{i+1} \times \mathbf{I}_{i+1}^{C_{i+1}}\omega_{i+1}^{i+1} \end{cases}$$

$$\textit{Iteraciones internas} \begin{cases} \mathbf{f}_i^i = R_{i+1}^i\mathbf{f}_{i+1}^{i+1} + F_i^i \\ \mathbf{n}_i^i = N_i^i + R_{i+1}^i\mathbf{n}_{i+1}^{i+1} + \mathbf{p}_{C_i}^i \times F_i^i + \mathbf{p}_{i+1}^i \times R_{i+1}^i\mathbf{f}_{i+1}^{i+1} \\ \tau_i = \left(\mathbf{f}_i^i\right)^T \mathbf{z}_i^i \end{cases}$$

Como datos adicionales, considérese que los vectores que ubican los centros de masa del robot son:

$$\mathbf{p}_{C_1}^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l_1 \end{pmatrix}, \mathbf{p}_{C_2}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l_2 \end{pmatrix}, \mathbf{p}_{C_3}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_3 \end{pmatrix}$$

Además, sean los sistemas de referencia $\{C_i\}\, m$, $i = 1, 2, 3$, donde la orientación de $\{C_i\}$ es la misma que la de $\{i\}$ y el origen de $\{C_i\}$ coincide con el centro de masa del eslabón i. Entonces, los tensores de inercia considerados son:

$$\mathbf{I}_i^{C_i} = \begin{pmatrix} I_{x_i} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y_i} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z_i} \end{pmatrix}, i = 1, 2, 3$$

donde $\mathbf{I}_i^{C_i}$ es el tensor de inercia del eslabón i calculado con respecto al sistema de referencia $\{i\}$. Además, como no se considera que el manipulador se encuentre en contacto con el medio y la base del robot es fija, se concluye que:

$$\mathbf{f}_e^e = 0, \mathbf{n}_e^e = 0, \omega_0^0 = 0, \dot{\omega}_0^0 = 0, \dot{\mathbf{v}}_0^0 = \begin{pmatrix} g \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aplicando las ecuaciones de Newton-Euler, se comienza con $i = 0$, con la primera articulación que es prismática, para las iteraciones externas:

$$\omega_1^1 = R_0^1\omega_0^0 = 0$$

$$\dot{\omega}_1^1 = R_0^1\dot{\omega}_0^0 = 0$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}_1^1 &= R_0^1\left[\dot{\mathbf{v}}_0^0 + \dot{\omega}_0^0 \times \mathbf{p}_1^0 + \omega_0^0 \times \left(\omega_0^0 \times \mathbf{p}_1^0\right)\right] + 2\omega_1^1 \times \dot{d}_1\mathbf{z}_1^1 + \ddot{d}_1\mathbf{z}_1^1 \\ &= R_0^1\dot{\mathbf{v}}_0^0 + \ddot{d}_1\mathbf{z}_1^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} g \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{d}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ 0 \\ \ddot{d}_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\dot{\mathbf{v}}_{C_1}^1 = \dot{\omega}_1^1 \times \mathbf{p}_{C_1}^1 + \omega_1^1 \times \left(\omega_1^1 \times \mathbf{p}_{C_1}^1\right) + \dot{\mathbf{v}}_1^1 = \begin{pmatrix} g \\ 0 \\ \ddot{d}_1 \end{pmatrix}$$

$$F_1^1 = m_1 \dot{\mathbf{v}}_{C_1}^1 = \begin{pmatrix} m_1 g \\ 0 \\ m_1 \ddot{d}_1 \end{pmatrix}$$

$$N_1^1 = \mathbf{I}_1^{C_1} \dot{\omega}_1^1 + \omega_1^1 \times \mathbf{I}_1^{C_1} \omega_1^1 = 0$$

Para $i = 1$ y la articulación rotacional se obtiene:

$$\begin{aligned} \omega_2^2 &= R_1^2 \omega_1^1 + \dot{\theta}_2 \mathbf{z}_2^2 \\ &= \begin{pmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -s_2 & -c_2 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \dot{\theta}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\dot{\omega}_2^2 = R_1^2 \dot{\omega}_1^1 + R_1^2 \omega_1^1 \times \dot{\theta}_2 \mathbf{z}_2^2 + \ddot{\theta}_2 \mathbf{z}_2^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}_2^2 &= R_1^2 \left(\dot{\omega}_1^1 \times \mathbf{p}_2^1 + \omega_1^1 \times \left(\omega_1^1 \times \mathbf{p}_2^1\right) + \dot{\mathbf{v}}_1^1\right) = R_1^2 \dot{\mathbf{v}}_1^1 \\ &= \begin{pmatrix} c_2 & 0 & -s_2 \\ -s_2 & 0 & -c_2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g \\ 0 \\ \ddot{d}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} gc_2 - \ddot{d}_1 s_2 \\ -gs_2 - \ddot{d}_1 c_2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}_{C_2}^2 &= \dot{\omega}_2^2 \times \mathbf{p}_{C_2}^2 + \omega_2^2 \times \left(\omega_2^2 \times \mathbf{p}_{C_2}^2\right) + \dot{\mathbf{v}}_2^2 \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l_2 \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} gc_2 - \ddot{d}_1 s_2 \\ -gs_2 - \ddot{d}_1 c_2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\ddot{\theta}_2 & 0 \\ \ddot{\theta}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\theta}_2 & 0 \\ \dot{\theta}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\theta}_2 & 0 \\ \dot{\theta}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l_2 \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} gc_2 - \ddot{d}_1 s_2 \\ -gs_2 - \ddot{d}_1 c_2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} gc_2 - \ddot{d}_1 s_2 \\ -gs_2 - \ddot{d}_1 c_2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$F_2^2 = m_2 \dot{\mathbf{v}}_{C_2}^2 = \begin{pmatrix} m_2 g c_2 - m_2 \ddot{d}_1 s_2 \\ -m_2 g s_2 - m_2 \ddot{d}_1 c_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
N_2^2 &= \mathbf{I}_2^{C_2}\dot{\omega}_2^2 + \omega_2^2 \times \mathbf{I}_2^{C_2}\omega_2^2 \\
&= \begin{pmatrix} I_{x_2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_{x_2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{z_2}\ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\theta}_2 & 0 \\ \dot{\theta}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{z_2}\dot{\theta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{z_2}\ddot{\theta}_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Finalmente para $i = 2$ se obtiene con la articulación rotacional en iteraciones externas:

$$
\begin{aligned}
\omega_3^3 &= R_2^3\omega_2^2 + \dot{\theta}_3\mathbf{z}_3^3 \\
&= \begin{pmatrix} c_3 & 0 & s_3 \\ -s_3 & 0 & c_3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} + \dot{\theta}_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_2 s_3 \\ \dot{\theta}_2 c_3 \\ \dot{\theta}_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\omega}_3^3 &= R_2^3\dot{\omega}_2^2 + R_2^3\omega_2^2 \times \dot{\theta}_3\mathbf{z}_3^3 + \ddot{\theta}_3\mathbf{z}_3^3 \\
&= \begin{pmatrix} c_3 & 0 & s_3 \\ -s_3 & 0 & c_3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_3 & 0 & s_3 \\ -s_3 & 0 & c_3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_2 s_3 \\ \ddot{\theta}_2 c_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_2 c_3 \\ 0 & 0 & -\dot{\theta}_2 s_3 \\ -\dot{\theta}_2 c_3 & \dot{\theta}_2 s_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_2 s_3 \\ \ddot{\theta}_2 c_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 c_3 \\ -\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 s_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_2 s_3 + \dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 c_3 \\ \ddot{\theta}_2 c_3 - \dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 s_3 \\ \ddot{\theta}_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{v}}_3^3 &= R_2^3\left(\dot{\omega}_2^2 \times \mathbf{p}_3^2 + \omega_2^2 \times \left(\omega_2^2 \times \mathbf{p}_3^2\right) + \dot{\mathbf{v}}_2^2\right) \\
&= \begin{pmatrix} c_3 & 0 & s_3 \\ -s_3 & 0 & c_3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \left(\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -L_3 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + \right. \\
&\quad \left. \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -L_3 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} gc_2 - \ddot{d}_1 s_2 \\ -gs_2 - \ddot{d}_1 c_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} c_3 & 0 & s_3 \\ -s_3 & 0 & c_3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \left(\left(\begin{pmatrix} 0 & -\ddot{\theta}_2 & 0 \\ \ddot{\theta}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -L_3 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + \right. \\
&\quad \left. \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\theta}_2 & 0 \\ \dot{\theta}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 & -\dot{\theta}_2 & 0 \\ \dot{\theta}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -L_3 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} gc_2 - \ddot{d}_1 s_2 \\ -gs_2 - \ddot{d}_1 c_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} c_3 & 0 & s_3 \\ -s_3 & 0 & c_3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} gc_2 - \ddot{d}_1 s_2 + L_3\ddot{\theta}_2 \\ -gs_2 - \ddot{d}_1 c_2 + L_3\dot{\theta}_2^2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} gc_2c_3 - \ddot{d}_1 s_2 c_3 + L_3\ddot{\theta}_2 c_3 \\ -gc_2 s_3 + \ddot{d}_1 s_2 s_3 - L_3\ddot{\theta}_2 s_3 \\ gs_2 + \ddot{d}_1 c_2 - L_3\dot{\theta}_2^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{v}}_{C_3}^3 &= \dot{\omega}_3^3 \times \mathbf{p}_{C_3}^3 + \omega_3^3 \times \left(\omega_3^3 \times \mathbf{p}_{C_3}^3\right) + \dot{\mathbf{v}}_3^3 \\
&= \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_2 s_3 + \dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 c_3 \\ \ddot{\theta}_2 c_3 - \dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 s_3 \\ \ddot{\theta}_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{\theta}_2 s_3 \\ \dot{\theta}_2 c_3 \\ \dot{\theta}_3 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} \dot{\theta}_2 s_3 \\ \dot{\theta}_2 c_3 \\ \dot{\theta}_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_3 \end{pmatrix}\right) \\
&\quad + \begin{pmatrix} gc_2c_3 - \ddot{d}_1 s_2 c_3 + L_3\ddot{\theta}_2 c_3 \\ -gc_2s_3 + \ddot{d}_1 s_2 s_3 - L_3\ddot{\theta}_2 s_3 \\ gs_2 + \ddot{d}_1 c_2 - L_3\dot{\theta}_2^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -\ddot{\theta}_3 & \ddot{\theta}_2 c_3 - \dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 s_3 \\ \ddot{\theta}_3 & 0 & -\left(\ddot{\theta}_2 s_3 + \dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 c_3\right) \\ -\left(\ddot{\theta}_2 c_3 - \dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 s_3\right) & \ddot{\theta}_2 s_3 + \dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 c_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_3 \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\theta}_3 & \dot{\theta}_2 c_3 \\ \dot{\theta}_3 & 0 & -\dot{\theta}_2 s_3 \\ -\dot{\theta}_2 c_3 & \dot{\theta}_2 s_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\theta}_3 & \dot{\theta}_2 c_3 \\ \dot{\theta}_3 & 0 & -\dot{\theta}_2 s_3 \\ -\dot{\theta}_2 c_3 & \dot{\theta}_2 s_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_3 \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} gc_2c_3 - \ddot{d}_1 s_2 c_3 + L_3\ddot{\theta}_2 c_3 \\ -gc_2s_3 + \ddot{d}_1 s_2 s_3 - L_3\ddot{\theta}_2 s_3 \\ gs_2 + \ddot{d}_1 c_2 - L_3\dot{\theta}_2^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} l_3\ddot{\theta}_2 c_3 - l_3\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 s_3 \\ -l_3\ddot{\theta}_2 s_3 - l_3\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 c_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\theta}_3 & \dot{\theta}_2 c_3 \\ \dot{\theta}_3 & 0 & -\dot{\theta}_2 s_3 \\ -\dot{\theta}_2 c_3 & \dot{\theta}_2 s_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_3\dot{\theta}_2 c_3 \\ -l_3\dot{\theta}_2 s_3 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} gc_2c_3 - \ddot{d}_1 s_2 c_3 + L_3\ddot{\theta}_2 c_3 \\ -gc_2s_3 + \ddot{d}_1 s_2 s_3 - L_3\ddot{\theta}_2 s_3 \\ gs_2 + \ddot{d}_1 c_2 - L_3\dot{\theta}_2^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} l_3\ddot{\theta}_2 c_3 - l_3\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 s_3 \\ -l_3\ddot{\theta}_2 s_3 - l_3\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 c_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_3\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 s_3 \\ l_3\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 c_3 \\ -l_3\dot{\theta}_2^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} gc_2c_3 - \ddot{d}_1 s_2 c_3 + L_3\ddot{\theta}_2 c_3 \\ -gc_2s_3 + \ddot{d}_1 s_2 s_3 - L_3\ddot{\theta}_2 s_3 \\ gs_2 + \ddot{d}_1 c_2 - L_3\dot{\theta}_2^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} gc_2c_3 - \ddot{d}_1 s_2 c_3 + (L_3 + l_3)\,\ddot{\theta}_2 c_3 \\ -gc_2s_3 + \ddot{d}_1 s_2 s_3 - (L_3 + l_3)\,\ddot{\theta}_2 s_3 \\ gs_2 + \ddot{d}_1 c_2 - (L_3 + l_3)\,\dot{\theta}_2^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
F_3^3 = m_3 \dot{\mathbf{v}}_{C_3}^3 = \begin{pmatrix} m_3 g c_2 c_3 - m_3 \ddot{d}_1 s_2 c_3 + m_3 (L_3 + l_3)\,\ddot{\theta}_2 c_3 \\ -m_3 g c_2 s_3 + m_3 \ddot{d}_1 s_2 s_3 - m_3 (L_3 + l_3)\,\ddot{\theta}_2 s_3 \\ m_3 g s_2 + m_3 \ddot{d}_1 c_2 - m_3 (L_3 + l_3)\,\dot{\theta}_2^2 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
N_3^3 &= \mathbf{I}_3^{C_3}\dot{\omega}_3^3 + \omega_3^3 \times \mathbf{I}_3^{C_3}\omega_3^3 \\
&= \begin{pmatrix} I_{x_3} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y_3} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_2 s_3 + \dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 c_3 \\ \ddot{\theta}_2 c_3 - \dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 s_3 \\ \ddot{\theta}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{\theta}_2 s_3 \\ \dot{\theta}_2 c_3 \\ \dot{\theta}_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_{x_3} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y_3} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_2 s_3 \\ \dot{\theta}_2 c_3 \\ \dot{\theta}_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} I_{x_3}\ddot{\theta}_2 s_3 + I_{x_3}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 c_3 \\ I_{y_3}\ddot{\theta}_2 c_3 - I_{y_3}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 s_3 \\ I_{z_3}\ddot{\theta}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\theta}_3 & \dot{\theta}_2 c_3 \\ \dot{\theta}_3 & 0 & -\dot{\theta}_2 s_3 \\ -\dot{\theta}_2 c_3 & \dot{\theta}_2 s_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{x_3} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y_3} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_2 s_3 \\ \dot{\theta}_2 c_3 \\ \dot{\theta}_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} I_{x_3}\ddot{\theta}_2 s_3 + I_{x_3}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 c_3 \\ I_{y_3}\ddot{\theta}_2 c_3 - I_{y_3}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 s_3 \\ I_{z_3}\ddot{\theta}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\theta}_3 & \dot{\theta}_2 c_3 \\ \dot{\theta}_3 & 0 & -\dot{\theta}_2 s_3 \\ -\dot{\theta}_2 c_3 & \dot{\theta}_2 s_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{x_3}\dot{\theta}_2 s_3 \\ I_{y_3}\dot{\theta}_2 c_3 \\ I_{z_3}\dot{\theta}_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} I_{x_3}\ddot{\theta}_2 s_3 + I_{x_3}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 c_3 \\ I_{y_3}\ddot{\theta}_2 c_3 - I_{y_3}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 s_3 \\ I_{z_3}\ddot{\theta}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -I_{y_3}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 c_3 + I_{z_3}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 c_3 \\ I_{x_3}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 s_3 - I_{z_3}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 s_3 \\ -I_{x_3}\dot{\theta}_2^2 s_3 c_3 + I_{y_3}\dot{\theta}_2^2 s_3 c_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} I_{x_3}\ddot{\theta}_2 s_3 + \left(I_{x_3} - I_{y_3} + I_{z_3}\right)\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 c_3 \\ I_{y_3}\ddot{\theta}_2 c_3 + \left(I_{x_3} - I_{y_3} - I_{z_3}\right)\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 s_3 \\ I_{z_3}\ddot{\theta}_3 + \left(-I_{x_3} + I_{y_3}\right)\dot{\theta}_2^2 s_3 c_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Una vez que se han terminado las iteraciones externas, se procede a efectuar las iteraciones internas. Se comienza con $i = 3$ *para la articulación rotacional:*

$$
\mathbf{f}_3^3 = R_e^3\mathbf{f}_e^e + F_3^3 = \begin{pmatrix} m_3 g c_2 c_3 - m_3\ddot{d}_1 s_2 c_3 + m_3\left(L_3 + l_3\right)\ddot{\theta}_2 c_3 \\ -m_3 g c_2 s_3 + m_3\ddot{d}_1 s_2 s_3 - m_3\left(L_3 + l_3\right)\ddot{\theta}_2 s_3 \\ m_3 g s_2 + m_3\ddot{d}_1 c_2 - m_3\left(L_3 + l_3\right)\dot{\theta}_2^2 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{n}_3^3 &= N_3^3 + R_e^3\mathbf{n}_e^e + \mathbf{p}_{C_3}^3 \times F_3^3 + \mathbf{p}_e^3 \times R_e^3\mathbf{f}_e^e \\
&= \begin{pmatrix} I_{x_3}\ddot{\theta}_2 s_3 + (I_{x_3} - I_{y_3} + I_{z_3})\,\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 c_3 \\ I_{y_3}\ddot{\theta}_2 c_3 + (I_{x_3} - I_{y_3} - I_{z_3})\,\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 s_3 \\ I_{z_3}\ddot{\theta}_3 + (-I_{x_3} + I_{y_3})\,\dot{\theta}_2^2 s_3 c_3 \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} m_3 g c_2 c_3 - m_3\ddot{d}_1 s_2 c_3 + m_3\,(L_3 + l_3)\,\ddot{\theta}_2 c_3 \\ -m_3 g c_2 s_3 + m_3\ddot{d}_1 s_2 s_3 - m_3\,(L_3 + l_3)\,\ddot{\theta}_2 s_3 \\ m_3 g s_2 + m_3\ddot{d}_1 c_2 - m_3\,(L_3 + l_3)\,\dot{\theta}_2^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} I_{x_3}\ddot{\theta}_2 s_3 + (I_{x_3} - I_{y_3} + I_{z_3})\,\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 c_3 \\ I_{y_3}\ddot{\theta}_2 c_3 + (I_{x_3} - I_{y_3} - I_{z_3})\,\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 s_3 \\ I_{z_3}\ddot{\theta}_3 + (-I_{x_3} + I_{y_3})\,\dot{\theta}_2^2 s_3 c_3 \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} 0 & -l_3 & 0 \\ l_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_3 g c_2 c_3 - m_3\ddot{d}_1 s_2 c_3 + m_3\,(L_3 + l_3)\,\ddot{\theta}_2 c_3 \\ -m_3 g c_2 s_3 + m_3\ddot{d}_1 s_2 s_3 - m_3\,(L_3 + l_3)\,\ddot{\theta}_2 s_3 \\ m_3 g s_2 + m_3\ddot{d}_1 c_2 - m_3\,(L_3 + l_3)\,\dot{\theta}_2^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} I_{x_3}\ddot{\theta}_2 s_3 + (I_{x_3} - I_{y_3} + I_{z_3})\,\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 c_3 \\ I_{y_3}\ddot{\theta}_2 c_3 + (I_{x_3} - I_{y_3} - I_{z_3})\,\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 s_3 \\ I_{z_3}\ddot{\theta}_3 + (-I_{x_3} + I_{y_3})\,\dot{\theta}_2^2 s_3 c_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_3 g l_3 c_2 s_3 - m_3 l_3\ddot{d}_1 s_2 s_3 + m_3\,(L_3 + l_3)\,l_3\ddot{\theta}_2 s_3 \\ m_3 g l_3 c_2 c_3 - m_3 l_3\ddot{d}_1 s_2 c_3 + m_3\,(L_3 + l_3)\,l_3\ddot{\theta}_2 c_3 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -m_3 l_3\ddot{d}_1 s_2 s_3 + (I_{x_3} + m_3\,(L_3 + l_3)\,l_3)\,\ddot{\theta}_2 s_3 + (I_{x_3} - I_{y_3} + I_{z_3})\,\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 c_3 + m_3 g l_3 c_2 s_3 \\ -m_3 l_3\ddot{d}_1 s_2 c_3 + (I_{y_3} + m_3\,(L_3 + l_3)\,l_3)\,\ddot{\theta}_2 c_3 + (I_{x_3} - I_{y_3} - I_{z_3})\,\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 s_3 + m_3 g l_3 c_2 c_3 \\ I_{z_3}\ddot{\theta}_3 + (-I_{x_3} + I_{y_3})\,\dot{\theta}_2^2 s_3 c_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tau_3 &= \left(\mathbf{n}_3^3\right)^T \mathbf{z}_3^3 \\
&= I_{z_3}\ddot{\theta}_3 + (-I_{x_3} + I_{y_3})\,\dot{\theta}_2^2 s_3 c_3
\end{aligned}
$$

Con $i = 2$ para la articulación rotacional se obtiene:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{f}_2^2 &= R_3^2\mathbf{f}_3^3 + F_2^2 \\
&= \begin{pmatrix} c_3 & -s_3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_3 & c_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_3 g c_2 c_3 - m_3\ddot{d}_1 s_2 c_3 + m_3\,(L_3 + l_3)\,\ddot{\theta}_2 c_3 \\ -m_3 g c_2 s_3 + m_3\ddot{d}_1 s_2 s_3 - m_3\,(L_3 + l_3)\,\ddot{\theta}_2 s_3 \\ m_3 g s_2 + m_3\ddot{d}_1 c_2 - m_3\,(L_3 + l_3)\,\dot{\theta}_2^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_2 g c_2 - m_2\ddot{d}_1 s_2 \\ -m_2 g s_2 - m_2\ddot{d}_1 c_2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -(m_2 + m_3)\,\ddot{d}_1 s_2 + m_3\,(L_3 + l_3)\,\ddot{\theta}_2 + (m_2 + m_3)\,g c_2 \\ -(m_2 + m_3)\,\ddot{d}_1 c_2 + m_3\,(L_3 + l_3)\,\dot{\theta}_2^2 - (m_2 + m_3)\,g s_2 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{n}_2^2 &= N_2^2 + R_3^2\mathbf{n}_3^3 + \mathbf{p}_{C_2}^2 \times F_2^2 + \mathbf{p}_3^2 \times R_3^2\mathbf{f}_3^3 \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{z_2}\ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} c_3 & -s_3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_3 & c_3 & 0 \end{pmatrix} * \\
&\quad * \begin{pmatrix} -m_3 l_3 \ddot{d}_1 s_2 s_3 + (I_{x_3} + m_3(L_3+l_3)l_3)\ddot{\theta}_2 s_3 + (I_{x_3} - I_{y_3} + I_{z_3})\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 c_3 + m_3 g l_3 c_2 s_3 \\ -m_3 l_3 \ddot{d}_1 s_2 c_3 + (I_{y_3} + m_3(L_3+l_3)l_3)\ddot{\theta}_2 c_3 + (I_{x_3} - I_{y_3} - I_{z_3})\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 s_3 + m_3 g l_3 c_2 c_3 \\ I_{z_3}\ddot{\theta}_3 + (-I_{x_3} + I_{y_3})\dot{\theta}_2^2 s_3 c_3 \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} m_2 g c_2 - m_2 \ddot{d}_1 s_2 \\ -m_2 g s_2 - m_2 \ddot{d}_1 c_2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} 0 \\ -L_3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_3 & -s_3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_3 & c_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_3 g c_2 c_3 - m_3 \ddot{d}_1 s_2 c_3 + m_3(L_3+l_3)\ddot{\theta}_2 c_3 \\ -m_3 g c_2 s_3 + m_3 \ddot{d}_1 s_2 s_3 - m_3(L_3+l_3)\ddot{\theta}_2 s_3 \\ m_3 g s_2 + m_3 \ddot{d}_1 c_2 - m_3(L_3+l_3)\dot{\theta}_2^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{z_2}\ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} (I_{x_3} - I_{y_3})\ddot{\theta}_2 s_3 c_3 + I_{z_3}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 \\ -I_{z_3}\ddot{\theta}_3 + (I_{x_3} - I_{y_3})\dot{\theta}_2^2 s_3 c_3 \\ -m_3 l_3 \ddot{d}_1 s_2 + (I_{x_3} s_3^2 + I_{y_3} c_3^2 + m_3(L_3+l_3)l_3)\ddot{\theta}_2 + 2(I_{x_3} - I_{y_3})\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 s_3 c_3 + m_3 g l_3 c_2 \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} 0 & l_2 & 0 \\ -l_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_2 g c_2 - m_2 \ddot{d}_1 s_2 \\ -m_2 g s_2 - m_2 \ddot{d}_1 c_2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -L_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ L_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_3 & -s_3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_3 & c_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_3 g c_2 c_3 - m_3 \ddot{d}_1 s_2 c_3 + m_3(L_3+l_3)\ddot{\theta}_2 c_3 \\ -m_3 g c_2 s_3 + m_3 \ddot{d}_1 s_2 s_3 - m_3(L_3+l_3)\ddot{\theta}_2 s_3 \\ m_3 g s_2 + m_3 \ddot{d}_1 c_2 - m_3(L_3+l_3)\dot{\theta}_2^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{n}_2^2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{z_2}\ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} (I_{x_3} - I_{y_3})\,\ddot{\theta}_2 s_3 c_3 + I_{z_3}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 \\ -I_{z_3}\ddot{\theta}_3 + (I_{x_3} - I_{y_3})\,\dot{\theta}_2^2 s_3 c_3 \\ -m_3 l_3 \ddot{d}_1 s_2 + (I_{x_3} s_3^2 + I_{y_3} c_3^2 + m_3 (L_3 + l_3)\, l_3)\,\ddot{\theta}_2 + 2\,(I_{x_3} - I_{y_3})\,\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 s_3 c_3 + m_3 g l_3 c_2 \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} -m_2 g l_2 s_2 - m_2 l_2 \ddot{d}_1 c_2 \\ -m_2 g l_2 c_2 + m_2 l_2 \ddot{d}_1 s_2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} -L_3 s_3 & -L_3 c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ L_3 c_3 & -L_3 s_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_3 g c_2 c_3 - m_3 \ddot{d}_1 s_2 c_3 + m_3 (L_3 + l_3)\,\ddot{\theta}_2 c_3 \\ -m_3 g c_2 s_3 + m_3 \ddot{d}_1 s_2 s_3 - m_3 (L_3 + l_3)\,\ddot{\theta}_2 s_3 \\ m_3 g s_2 + m_3 \ddot{d}_1 c_2 - m_3 (L_3 + l_3)\,\dot{\theta}_2^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{z_2}\ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} (I_{x_3} - I_{y_3})\,\ddot{\theta}_2 s_3 c_3 + I_{z_3}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 \\ -I_{z_3}\ddot{\theta}_3 + (I_{x_3} - I_{y_3})\,\dot{\theta}_2^2 s_3 c_3 \\ -m_3 l_3 \ddot{d}_1 s_2 + (I_{x_3} s_3^2 + I_{y_3} c_3^2 + m_3 (L_3 + l_3)\, l_3)\,\ddot{\theta}_2 + 2\,(I_{x_3} - I_{y_3})\,\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 s_3 c_3 + m_3 g l_3 c_2 \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} -m_2 g l_2 s_2 - m_2 l_2 \ddot{d}_1 c_2 \\ -m_2 g l_2 c_2 + m_2 l_2 \ddot{d}_1 s_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_3 L_3 \ddot{d}_1 s_2 + m_3 (L_3 + l_3)\, L_3 \ddot{\theta}_2 + m_3 g L_3 c_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} n_{2a} \\ n_{2b} \\ n_{2c} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
n_{2a} &= (I_{x_3} - I_{y_3})\,\ddot{\theta}_2 s_3 c_3 + I_{z_3}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 - m_2 g l_2 s_2 - m_2 l_2 \ddot{d}_1 c_2 \\
n_{2b} &= -I_{z_3}\ddot{\theta}_3 + (I_{x_3} - I_{y_3})\,\dot{\theta}_2^2 s_3 c_3 - m_2 g l_2 c_2 + m_2 l_2 \ddot{d}_1 s_2 \\
n_{2c} &= -m_3 (L_3 + l_3)\,\ddot{d}_1 s_2 + \left(I_{x_3} s_3^2 + I_{y_3} c_3^2 + m_3 (L_3 + l_3)^2 + I_{z_2}\right)\ddot{\theta}_2 \\
&\quad +2\,(I_{x_3} - I_{y_3})\,\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 s_3 c_3 + m_3 g\,(L_3 + l_3)\, c_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tau_2 &= \left(\mathbf{n}_2^2\right)^T \mathbf{z}_2^2 \\
&= -m_3 (L_3 + l_3)\,\ddot{d}_1 s_2 + \left(I_{x_3} s_3^2 + I_{y_3} c_3^2 + m_3 (L_3 + l_3)^2 + I_{z_2}\right)\ddot{\theta}_2 \\
&\quad +2\,(I_{x_3} - I_{y_3})\,\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 s_3 c_3 + m_3 g\,(L_3 + l_3)\, c_2
\end{aligned}
$$

Finalmente para $i=1$ con la articulación prismática se tiene:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{f}_1^1 &= R_2^1\mathbf{f}_2^2 + F_1^1 \\
&= \begin{pmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -s_2 & -c_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(m_2+m_3)\ddot{d}_1 s_2 + m_3(L_3+l_3)\ddot{\theta}_2 + (m_2+m_3)gc_2 \\ -(m_2+m_3)\ddot{d}_1 c_2 + m_3(L_3+l_3)\dot{\theta}_2^2 - (m_2+m_3)gs_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_1 g \\ 0 \\ m_1\ddot{d}_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} m_3(L_3+l_3)\ddot{\theta}_2 c_2 - m_3(L_3+l_3)\dot{\theta}_2^2 s_2 + (m_2+m_3)g \\ 0 \\ (m_2+m_3)\ddot{d}_1 - m_3(L_3+l_3)\ddot{\theta}_2 s_2 - m_3(L_3+l_3)\dot{\theta}_2^2 c_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

En este caso no es necesario calcular $\mathbf{n}_1^1$, por lo que se obtiene el par:

$$
\begin{aligned}
\tau_1 &= \left(\mathbf{f}_1^1\right)^T \mathbf{z}_1^1 \\
&= (m_2+m_3)\ddot{d}_1 - m_3(L_3+l_3)\ddot{\theta}_2 s_2 - m_3(L_3+l_3)\dot{\theta}_2^2 c_2
\end{aligned}
$$

por lo que las ecuaciones dinámicas del manipulador son:

$$
\left\{ \begin{array}{c} \tau_1 = (m_2+m_3)\ddot{d}_1 - m_3(L_3+l_3)\ddot{\theta}_2 s_2 - m_3(L_3+l_3)\dot{\theta}_2^2 c_2 \\ \tau_2 = -m_3(L_3+l_3)\ddot{d}_1 s_2 + \left(I_{x_3}s_3^2 + I_{y_3}c_3^2 + m_3(L_3+l_3)^2 + I_{z_2}\right)\ddot{\theta}_2 \\ +2(I_{x_3}-I_{y_3})\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 s_3 c_3 + m_3 g(L_3+l_3)c_2 \\ \tau_3 = I_{z_3}\ddot{\theta}_3 + (-I_{x_3}+I_{y_3})\dot{\theta}_2^2 s_3 c_3 \end{array} \right.
$$

Las ecuaciones anteriores pueden factorizarse de la siguiente manera:

$$
M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + G(\mathbf{q}) = \Gamma
$$

donde:

$$
M(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} m_2+m_3 & -m_3(L_3+l_3)s_2 & 0 \\ -m_3(L_3+l_3)s_2 & I_{x_3}s_3^2 + I_{y_3}c_3^2 + m_3(L_3+l_3)^2 + I_{z_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z_3} \end{pmatrix}
$$

$$
C(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \begin{pmatrix} 0 & -m_3(L_3+l_3)\dot{\theta}_2 c_2 & 0 \\ 0 & (I_{x_3}-I_{y_3})\dot{\theta}_3 s_3 c_3 & (I_{x_3}-I_{y_3})\dot{\theta}_2 s_3 c_3 \\ 0 & (-I_{x_3}+I_{y_3})\dot{\theta}_2 s_3 c_3 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\mathbf{q} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}, G(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} 0 \\ m_3 g(L_3+l_3)c_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \Gamma = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix}
$$

Además, nótese que:

$$
\dot{M} = \begin{pmatrix} 0 & -m_3(L_3+l_3)\dot{\theta}_2 c_2 & 0 \\ -m_3(L_3+l_3)\dot{\theta}_2 c_2 & 2(I_{x_3}-I_{y_3})\dot{\theta}_3 s_3 c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\dot{M} - 2C = \begin{pmatrix} 0 & m_3(L_3+l_3)\dot{\theta}_2 c_2 & 0 \\ -m_3(L_3+l_3)\dot{\theta}_2 c_2 & 0 & -2(I_{x_3}-I_{y_3})\dot{\theta}_2 s_3 c_3 \\ 0 & 2(I_{x_3}-I_{y_3})\dot{\theta}_2 s_3 c_3 & 0 \end{pmatrix}
$$

por lo que se cumple la propiedad de antisimetría.

Ejercicio 11 *Obtener las ecuaciones dinámicas del robot mostrado en la figura 6 empleando las ecuaciones EL.*

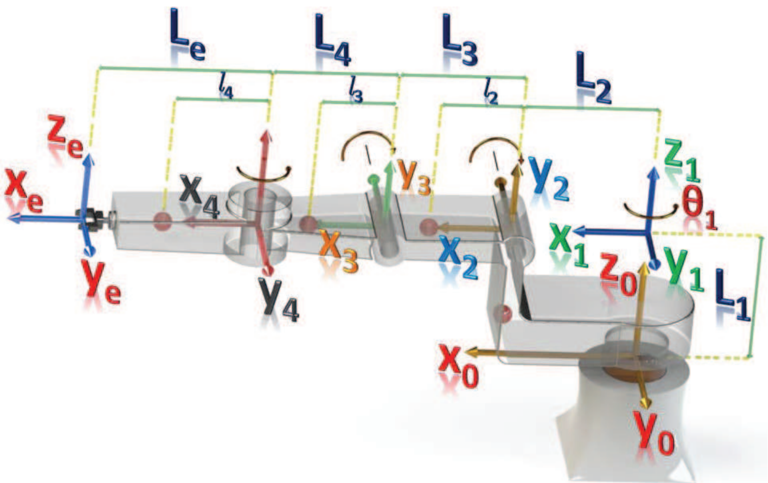

Figura 6: Cálculo de ecuaciones dinámicas empleando las ecuaciones de EL.

Solución 11 *A partir de la Fig. 6 se obtiene la tabla de parámetros DH siguiente:*

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	L_1	θ_1
2	90	L_2	0	θ_2
3	0	L_3	0	θ_3
4	-90	L_4	0	θ_4

***Tabla 5-06**. Parámetros DH de robot de 4-GDL RRRR*

Ahora se obtienen las matrices de transformación correspondientes:

$$T_1^0 = \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, T_2^1 = \begin{pmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & L_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_3^2 = \begin{pmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & L_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, T_4^3 = \begin{pmatrix} c_4 & -s_4 & 0 & L_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s_4 & -c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_2^0 = \begin{pmatrix} c_1c_2 & -c_1s_2 & s_1 & L_2c_1 \\ s_1c_2 & -s_1s_2 & -c_1 & L_2s_1 \\ s_2 & c_2 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, T_3^0 = \begin{pmatrix} c_1c_{23} & -c_1s_{23} & s_1 & L_2c_1 + L_3c_1c_2 \\ s_1c_{23} & -s_1s_{23} & -c_1 & L_2s_1 + L_3s_1c_2 \\ s_{23} & c_{23} & 0 & L_1 + L_3s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_4^0 = \begin{pmatrix} c_1c_{23}c_4 - s_1s_4 & -s_1c_4 - c_1c_{23}s_4 & -c_1s_{23} & L_2c_1 + L_3c_1c_2 + L_4c_1c_{23} \\ s_1c_{23}c_4 + c_1s_4 & c_1c_4 - s_1c_{23}s_4 & -s_1s_{23} & L_2s_1 + L_3s_1c_2 + L_4s_1c_{23} \\ s_{23}c_4 & -s_4s_{23} & c_{23} & L_1 + L_3s_2 + L_4s_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El siguiente paso consiste en la determinación de los orígenes de los centros de masa de los eslabones de acuerdo a lo indicado en la fig. 6

$$\begin{pmatrix} \mathbf{p}_{c_1}^0 \\ 1 \end{pmatrix} = T_1^0 \begin{pmatrix} L_2 \\ 0 \\ -L_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_2c_1 \\ L_2s_1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{p}_{c_2}^0 \\ 1 \end{pmatrix} = T_2^0 \begin{pmatrix} l_2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_2c_1 + l_2c_1c_2 \\ L_2s_1 + l_2s_1c_2 \\ L_1 + l_2s_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{p}_{c_3}^0 \\ 1 \end{pmatrix} = T_3^0 \begin{pmatrix} l_3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_2c_1 + L_3c_1c_2 + l_3c_1c_{23} \\ L_2s_1 + L_3s_1c_2 + l_3s_1c_{23} \\ L_1 + L_3s_2 + l_3s_{23} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{p}_{c_4}^0 \\ 1 \end{pmatrix} = T_4^0 \begin{pmatrix} l_4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_2c_1 + L_3c_1c_2 + L_4c_1c_{23} - l_4s_1s_4 + l_4c_1c_{23}c_4 \\ L_2s_1 + L_3s_1c_2 + l_4c_1s_4 + L_4s_1c_{23} + l_4s_1c_{23}c_4 \\ L_1 + L_3s_2 + L_4s_{23} + l_4s_{23}c_4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Empleando los vectores $\mathbf{p}_{c_i}^0$ *se calculan los Jacobianos relacionados con la velocidad lineal:*

$$J_{\mathbf{v}_{C_1}}^0 = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{p}_{c_1}^0}{\partial q_1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -L_2s_1 & 0 & 0 & 0 \\ L_2c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_{\mathbf{v}_{C_2}}^0 = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{p}_{c_2}^0}{\partial q_1} & \frac{\partial \mathbf{p}_{c_2}^0}{\partial q_2} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -L_2s_1 - l_2s_1c_2 & -l_2c_1s_2 & 0 & 0 \\ L_2c_1 + l_2c_1c_2 & -l_2s_1s_2 & 0 & 0 \\ 0 & l_2c_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_{\mathbf{v}_{C_3}}^0 = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{p}_{c_3}^0}{\partial q_1} & \frac{\partial \mathbf{p}_{c_3}^0}{\partial q_2} & \frac{\partial \mathbf{p}_{c_3}^0}{\partial q_3} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -L_2s_1 - L_3s_1c_2 - l_3s_1c_{23} & -L_3c_1s_2 - l_3c_1s_{23} & -l_3c_1s_{23} & 0 \\ L_2c_1 + L_3c_1c_2 + l_3c_1c_{23} & -L_3s_1s_2 - l_3s_1s_{23} & -l_3s_1s_{23} & 0 \\ 0 & L_3c_2 + l_3c_{23} & l_3c_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{v}_{C_4}}^0 &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{p}_{c_4}^0}{\partial q_1} & \frac{\partial \mathbf{p}_{c_4}^0}{\partial q_2} & \frac{\partial \mathbf{p}_{c_4}^0}{\partial q_3} & \frac{\partial \mathbf{p}_{c_4}^0}{\partial q_4} \end{pmatrix} \\ &= \left(\begin{matrix} -L_2s_1 - L_3s_1c_2 - L_4s_1c_{23} - l_4c_1s_4 - l_4s_1c_{23}c_4 & -L_3c_1s_2 - L_4c_1s_{23} - l_4c_1s_{23}c_4 \\ L_2c_1 + L_3c_1c_2 - l_4s_1s_4 + L_4c_1c_{23} + l_4c_1c_{23}c_4 & -L_3s_1s_2 - L_4s_1s_{23} - l_4s_1s_{23}c_4 \\ 0 & L_3c_2 + L_4c_{23} + l_4c_{23}c_4 \end{matrix} \right. \\ &\qquad \left. \begin{matrix} -L_4c_1s_{23} - l_4c_1s_{23}c_4 & -l_4s_1c_4 - l_4c_1c_{23}s_4 \\ -L_4s_1s_{23} - l_4s_1s_{23}c_4 & l_4c_1c_4 - l_4s_1c_{23}s_4 \\ L_4c_{23} + l_4c_{23}c_4 & -l_4s_{23}s_4 \end{matrix} \right) \end{aligned}$$

Con el valor de los Jacobianos obtenidos anteriormente es posible obtener la energía relacionada con el movimiento lineal ($T_{\mathbf{v}}$) de los eslabones como se indica a continuación:

$$T_{\mathbf{v}} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \left(m_1 \left(J^0_{\mathbf{v}_{C_1}}\right)^T J^0_{\mathbf{v}_{C_1}} + m_2 \left(J^0_{\mathbf{v}_{C_2}}\right)^T J^0_{\mathbf{v}_{C_2}} + m_3 \left(J^0_{\mathbf{v}_{C_3}}\right)^T J^0_{\mathbf{v}_{C_3}} + m_4 \left(J^0_{\mathbf{v}_{C_4}}\right)^T J^0_{\mathbf{v}_{C_4}} \right) \dot{\mathbf{q}}$$

donde:

$$m_1 \left(J^0_{\mathbf{v}_{C_1}}\right)^T J^0_{\mathbf{v}_{C_1}} = \begin{pmatrix} m_1 L_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$m_2 \left(J^0_{\mathbf{v}_{C_2}}\right)^T J^0_{\mathbf{v}_{C_2}} = m_2 \begin{pmatrix} m_2\left(2l_2L_2c_2 + L_2^2 + l_2^2c_2^2\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 l_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$m_3 \left(J^0_{\mathbf{v}_{C_3}}\right)^T J^0_{\mathbf{v}_{C_3}} = m_3 \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & 0 \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{11} &= 2L_2L_3c_2 + 2L_2l_3c_{23} + 2l_3L_3c_2c_{23} + L_2^2 + L_3^2c_2^2 + l_3^2c_{23}^2 \\
\alpha_{22} &= 2l_3L_3c_3 + L_3^2 + l_3^2 \\
\alpha_{23} &= l_3L_3c_3 + l_3^2 \\
\alpha_{32} &= l_3L_3c_3 + l_3^2 \\
\alpha_{33} &= l_3^2
\end{aligned}$$

$$m_4 \left(J^0_{\mathbf{v}_{C_4}}\right)^T J^0_{\mathbf{v}_{C_4}} = m_4 \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{14} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & \beta_{24} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} & \beta_{34} \\ \beta_{41} & \beta_{42} & \beta_{43} & \beta_{44} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{11} &= 2L_2L_3c_2 + 2L_2L_4c_{23} + 2L_3L_4c_2c_{23} + 2L_2l_4c_{23}c_4 + 2L_4l_4c_{23}^2c_4 + 2L_3l_4c_2c_{23}c_4 \\
&\quad + L_2^2 + L_3^2c_2^2 + l_4^2s_4^2 + L_4^2c_{23}^2 + l_4^2c_{23}^2c_4^2 \\
\beta_{21} &= L_3l_4s_2s_4 + l_4L_4s_{23}s_4 \\
\beta_{31} &= l_4s_{23}s_4\left(L_4 + l_4c_4\right) \\
\beta_{41} &= L_2l_4c_4 + L_3l_4c_2c_4 + l_4L_4c_{23}c_4 + l_4^2c_{23}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{12} &= L_3l_4s_2s_4 + l_4L_4s_{23}s_4 + l_4^2s_{23}s_4c_4 \\
\beta_{22} &= 2L_3l_4c_3c_4 + 2l_4L_4c_4 + 2L_3L_4c_3 + L_3^2 + L_4^2 + l_4^2c_4^2 \\
\beta_{32} &= L_3L_4c_3 + L_3l_4c_3c_4 + 2l_4L_4c_4 + L_4^2 + c_4^2l_4^2 \\
\beta_{42} &= -L_3l_4s_3s_4
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\beta_{13} &= l_4 s_{23} s_4 \left(L_4 + l_4 c_4\right)\\
\beta_{23} &= L_3 L_4 c_3 + L_3 l_4 c_3 c_4 + 2 l_4 L_4 c_4 + L_4^2 + c_4^2 l_4^2\\
\beta_{33} &= 2 l_4 L_4 c_4 + L_4^2 + l_4^2 c_4^2\\
\beta_{43} &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\beta_{14} &= L_2 l_4 c_4 + L_3 l_4 c_2 c_4 + l_4 L_4 c_{23} c_4 + l_4^2 c_{23}\\
\beta_{24} &= -L_3 l_4 s_3 s_4\\
\beta_{34} &= 0\\
\beta_{44} &= l_4^2
\end{aligned}
$$

Los tensores de inercia de los eslabones calculados en sus respectivos centros de masa son:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{I}_{C_1}^{C_1} &= \begin{pmatrix} I_{xx1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz1} \end{pmatrix}, \mathbf{I}_{C_2}^{C_2} = \begin{pmatrix} I_{xx2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz2} \end{pmatrix}\\
\mathbf{I}_{C_3}^{C_3} &= \begin{pmatrix} I_{xx3} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy3} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz3} \end{pmatrix}, \mathbf{I}_{C_4}^{C_4} = \begin{pmatrix} I_{xx4} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy4} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz4} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

por lo que es posible determinar los Jacobianos relacionados con el movimiento angular de la siguiente manera:

$$
J_{\omega_1}^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{z}_1^0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
J_{\omega_2}^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{z}_1^0 & \mathbf{z}_2^0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & s_1 & 0 & 0 \\ 0 & -c_1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
J_{\omega_3}^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{z}_1^0 & \mathbf{z}_2^0 & \mathbf{z}_3^0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & s_1 & s_1 & 0 \\ 0 & -c_1 & -c_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
J_{\omega_4}^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{z}_1^0 & \mathbf{z}_2^0 & \mathbf{z}_3^0 & \mathbf{z}_4^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & s_1 & s_1 & -c_1 s_{23} \\ 0 & -c_1 & -c_1 & -s_1 s_{23} \\ 1 & 0 & 0 & c_{23} \end{pmatrix}
$$

El siguiente paso consiste en transformar los Jacobianos obtenidos anteriormente al *sistema de referencia cuyo origen coincide con el centro de masa del eslabón respectivo:*

$$\begin{aligned}
J_{\omega_1}^{C_1} &= J_{\omega_1}^{1} = \left(R_1^0\right)^T J_{\omega_1}^0 \\
&= \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{\omega_2}^{C_2} &= J_{\omega_2}^{2} = \left(R_2^0\right)^T J_{\omega_2}^0 \\
&= \begin{pmatrix} c_1c_2 & -c_1s_2 & s_1 \\ s_1c_2 & -s_1s_2 & -c_1 \\ s_2 & c_2 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & s_1 & 0 & 0 \\ 0 & -c_1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} s_2 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{\omega_3}^{C_3} &= J_{\omega_3}^{3} = \left(R_3^0\right)^T J_{\omega_3}^0 \\
&= \begin{pmatrix} c_1c_{23} & -c_1s_{23} & s_1 \\ s_1c_{23} & -s_1s_{23} & -c_1 \\ s_{23} & c_{23} & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & s_1 & s_1 & 0 \\ 0 & -c_1 & -c_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} s_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{\omega_4}^{C_4} &= J_{\omega_4}^{4} = \left(R_4^0\right)^T J_{\omega_4}^0 \\
&= \begin{pmatrix} c_1c_{23}c_4 - s_1s_4 & -s_1c_4 - c_1c_{23}s_4 & -c_1s_{23} \\ s_1c_{23}c_4 + c_1s_4 & c_1c_4 - s_1c_{23}s_4 & -s_1s_{23} \\ s_{23}c_4 & -s_4s_{23} & c_{23} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & s_1 & s_1 & -c_1s_{23} \\ 0 & -c_1 & -c_1 & -s_1s_{23} \\ 1 & 0 & 0 & c_{23} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} s_{23}c_4 & -s_4 & -s_4 & 0 \\ -s_{23}s_4 & -c_4 & -c_4 & 0 \\ c_{23} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

y ahora se determina la energía cinética relacionada con el movimiento rotacional (T_ω) como se indica a continuación:

$$T_\omega = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \left(\left(J_{\omega_1}^{C_1}\right)^T \mathbf{I}_{C_1}^{C_1} J_{\omega_1}^{C_1} + \left(J_{\omega_2}^{C_2}\right)^T \mathbf{I}_{C_2}^{C_2} J_{\omega_2}^{C_2} + \left(J_{\omega_3}^{C_3}\right)^T \mathbf{I}_{C_3}^{C_3} J_{\omega_3}^{C_3} + \left(J_{\omega_4}^{C_4}\right)^T \mathbf{I}_{C_4}^{C_4} J_{\omega_4}^{C_4} \right) \dot{\mathbf{q}}$$

donde:

$$
\begin{aligned}
\left(J_{\omega_1}^{C_1}\right)^T \mathbf{I}_{C_1}^{C_1} J_{\omega_1}^{C_1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} I_{xx1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} I_{zz1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(J_{\omega_2}^{C_2}\right)^T \mathbf{I}_{C_2}^{C_2} J_{\omega_2}^{C_2} &= \begin{pmatrix} s_2 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} I_{xx2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_2 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} s_2^2 I_{xx2} + c_2^2 I_{yy2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{zz2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(J_{\omega_3}^{C_3}\right)^T \mathbf{I}_{C_3}^{C_3} J_{\omega_3}^{C_3} &= \begin{pmatrix} s_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} I_{xx3} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy3} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} s_{23}^2 I_{xx3} + c_{23}^2 I_{yy3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{zz3} & I_{zz3} & 0 \\ 0 & I_{zz3} & I_{zz3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(J_{\omega_4}^{C_4}\right)^T \mathbf{I}_{C_4}^{C_4} J_{\omega_4}^{C_4} &= \begin{pmatrix} s_{23}c_4 & -s_4 & -s_4 & 0 \\ -s_{23}s_4 & -c_4 & -c_4 & 0 \\ c_{23} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} I_{xx4} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy4} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{23}c_4 & -s_4 & -s_4 & 0 \\ -s_{23}s_4 & -c_4 & -c_4 & 0 \\ c_{23} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \left(\begin{matrix} s_{23}^2 c_4^2 I_{xx4} + s_{23}^2 s_4^2 I_{yy4} + c_{23}^2 I_{zz4} & -s_{23}s_4c_4 I_{xx4} + s_{23}s_4c_4 I_{yy4} \\ -s_{23}s_4c_4 I_{xx4} + s_{23}s_4c_4 I_{yy4} & s_4^2 I_{xx4} + c_4^2 I_{yy4} \\ -s_{23}s_4c_4 I_{xx4} + s_{23}s_4c_4 I_{yy4} & s_4^2 I_{xx4} + c_4^2 I_{yy4} \\ c_{23} I_{zz4} & 0 \end{matrix} \right. \\
&\qquad \left. \begin{matrix} -s_{23}s_4c_4 I_{xx4} + s_{23}s_4c_4 I_{yy4} & c_{23} I_{zz4} \\ s_4^2 I_{xx4} + c_4^2 I_{yy4} & 0 \\ s_4^2 I_{xx4} + c_4^2 I_{yy4} & 0 \\ 0 & I_{zz4} \end{matrix} \right)
\end{aligned}
$$

y sumando la energía cinética correspondiente al movimiento rotacional y la correspondiente al movimiento traslacional se obtiene la energía cinética total del sistema:

$$
\begin{aligned}
T &= T_{\mathbf{v}} + T_\omega \\
&= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}
\end{aligned}
$$

Para poder determinar el lagrangiano del sistema se calcula la energía potencial del robot como se indica acontinuación:

$$\begin{aligned}
U(\mathbf{q}) &= -m_1\left(\mathbf{p}_{c1}^0\right)^T\mathbf{g}^0 - m_1\left(\mathbf{p}_{c2}^0\right)^T\mathbf{g}^0 - m_1\left(\mathbf{p}_{c3}^0\right)^T\mathbf{g}^0 - m_1\left(\mathbf{p}_{c4}^0\right)^T\mathbf{g}^0 \\
&= -m_1\begin{pmatrix} L_2c_1 \\ L_2s_1 \\ 0 \end{pmatrix}^T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} - m_2\begin{pmatrix} L_2c_1+l_2c_1c_2 \\ L_2s_1+l_2s_1c_2 \\ L_1+l_2s_2 \end{pmatrix}^T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \\
&\quad -m_3\begin{pmatrix} L_2c_1+L_3c_1c_2+l_3c_1c_{23} \\ L_2s_1+L_3s_1c_2+l_3s_1c_{23} \\ L_1+L_3s_2+l_3s_{23} \end{pmatrix}^T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \\
&\quad -m_4\begin{pmatrix} L_2c_1+L_3c_1c_2+L_4c_1c_{23}-l_4s_1s_4+l_4c_1c_{23}c_4 \\ L_2s_1+L_3s_1c_2+l_4c_1s_4+L_4s_1c_{23}+l_4s_1c_{23}c_4 \\ L_1+L_3s_2+L_4s_{23}+l_4s_{23}c_4 \end{pmatrix}^T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \\
&= m_2g\left(L_1+l_2s_2\right)+m_3g\left(L_1+L_3s_2+l_3s_{23}\right)+m_4g\left(L_1+L_3s_2+L_4s_{23}+l_4s_{23}c_4\right)
\end{aligned}$$

Una vez calculadas la energía cinética y potencial, se determina el Lagrangiano del sistema como:

$$L = T(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) - U(\mathbf{q})$$

y, aplicando el mismo procedimiento descrito en el libro para el ejemplo 5.16, es posible obtener las ecuaciones dinámicas del sistema aplicando las ecuaciones EL.