Lección 3.1: Comparaciones múltiples

Alfaomega

Alfaomega-UAQro CIMAT

2017

Lección 3.1:
Comparaciones múltiples

Alfaomega

Alfaomega-UAQro CIMAT

2017

Índice

Consideraciones iniciales

1. Se presentará el caso del diseño de un sensor para disminuir el tiempo de paro en el sistema de un refrigerador analizado en la lección 2.1. El énfasis en esta lección es realizar el análisis de comparaciones múltiples.
2. El procedimiento del ejemplo anterior se puede repetir en estudios o investigaciones en medicina, biología, sicología entre otras áreas. Desde luego, se debe considerar el contexto, objetivos, el problema y las unidades experimentales del caso de estudio.
3. En la lección 3.2 se presentan la solución de otros ejercicios empleando R.
4. A partir de los prototipos o los diferentes materiales expuestos en las lecciones 1.4 y 2.4, se pueden simular diferentes situaciones para planear y realizar el diseño experimental y luego analizar los resultados. Lección 3.3

Consideraciones iniciales

1. Se presentará el caso del diseño de un sensor para disminuir el tiempo de paro en el sistema de un refrigerador analizado en la lección 2.1. El énfasis en esta lección es realizar el análisis de comparaciones múltiples.
2. El procedimiento del ejemplo anterior se puede repetir en estudios o investigaciones en medicina, biología, sicología entre otras áreas. Desde luego, se debe considerar el contexto, objetivos, el problema y las unidades experimentales del caso de estudio.
3. En la lección 3.2 se presentan la solución de otros ejercicios empleando R.
4. A partir de los prototipos o los diferentes materiales expuestos en las lecciones 1.4 y 2.4, se pueden simular diferentes situaciones para planear y realizar el diseño experimental y luego analizar los resultados. Lección 3.3

Consideraciones iniciales

1. Se presentará el caso del diseño de un sensor para disminuir el tiempo de paro en el sistema de un refrigerador analizado en la lección 2.1. El énfasis en esta lección es realizar el análisis de comparaciones múltiples.
2. El procedimiento del ejemplo anterior se puede repetir en estudios o investigaciones en medicina, biología, sicología entre otras áreas. Desde luego, se debe considerar el contexto, objetivos, el problema y las unidades experimentales del caso de estudio.
3. En la lección 3.2 se presentan la solución de otros ejercicios empleando R.
4. A partir de los prototipos o los diferentes materiales expuestos en las lecciones 1.4 y 2.4, se pueden simular diferentes situaciones para planear y realizar el diseño experimental y luego analizar los resultados. Lección 3.3

Consideraciones iniciales

1. Se presentará el caso del diseño de un sensor para disminuir el tiempo de paro en el sistema de un refrigerador analizado en la lección 2.1. El énfasis en esta lección es realizar el análisis de comparaciones múltiples.
2. El procedimiento del ejemplo anterior se puede repetir en estudios o investigaciones en medicina, biología, sicología entre otras áreas. Desde luego, se debe considerar el contexto, objetivos, el problema y las unidades experimentales del caso de estudio.
3. En la lección 3.2 se presentan la solución de otros ejercicios empleando R.
4. A partir de los prototipos o los diferentes materiales expuestos en las lecciones 1.4 y 2.4, se pueden simular diferentes situaciones para planear y realizar el diseño experimental y luego analizar los resultados. Lección 3.3

Diseño de experimentos para un factor

Cuando un experimentador tiene por objetivo comparar dos o más procedimientos, métodos, componentes, sistemas.

Los diseños para un factor son los apropiados

En la función de la aleatorización se tendrá la estructura de tratamiento o diseño.

El resultado del análisis de varianza permite detectar estadísticamente diferencias globales.

El siguiente paso es verificar si existen diferencias significativas por pares entre tratamientos.

Diseño de experimentos para un factor

Cuando un experimentador tiene por objetivo comparar dos o más procedimientos, métodos, componentes, sistemas.

Los diseños para un factor son los apropiados

En la función de la aleatorización se tendrá la estructura de tratamiento o diseño.

El resultado del análisis de varianza permite detectar estadísticamente diferencias globales.

El siguiente paso es verificar si existen diferencias significativas por pares entre tratamientos.

Diseño de experimentos para un factor

Cuando un experimentador tiene por objetivo comparar dos o más procedimientos, métodos, componentes, sistemas.

Los diseños para un factor son los apropiados

En la función de la aleatorización se tendrá la estructura de tratamiento o diseño.

El resultado del análisis de varianza permite detectar estadísticamente diferencias globales.

El siguiente paso es verificar si existen diferencias significativas por pares entre tratamientos.

Diseño de experimentos para un factor

Cuando un experimentador tiene por objetivo comparar dos o más procedimientos, métodos, componentes, sistemas.

Los diseños para un factor son los apropiados

En la función de la aleatorización se tendrá la estructura de tratamiento o diseño.

El resultado del análisis de varianza permite detectar estadísticamente diferencias globales.

El siguiente paso es verificar si existen diferencias significativas por pares entre tratamientos.

Diseño de experimentos para un factor

Cuando un experimentador tiene por objetivo comparar dos o más procedimientos, métodos, componentes, sistemas.

Los diseños para un factor son los apropiados

En la función de la aleatorización se tendrá la estructura de tratamiento o diseño.

El resultado del análisis de varianza permite detectar estadísticamente diferencias globales.

El siguiente paso es verificar si existen diferencias significativas por pares entre tratamientos.

Ejemplo

Se proponen cuatro diferentes tipos de sensores para controlar la temperatura de los refrigeradores.

Se desea establecer cuál de estos sensores hacen que un refrigerador haga el tiempo de paro en el menor tiempo y que las condiciones de enfriamiento sean las mismas en todos los casos.

Se preparan los refrigeradores para que todos operen bajo las mismas condiciones.

La finalidad es realizar comparaciones múltiples entre los sensores

Ejemplo

Se proponen cuatro diferentes tipos de sensores para controlar la temperatura de los refrigeradores.

Se desea establecer cuál de estos sensores hacen que un refrigerador haga el tiempo de paro en el menor tiempo y que las condiciones de enfriamiento sean las mismas en todos los casos.

Se preparan los refrigeradores para que todos operen bajo las mismas condiciones.

La finalidad es realizar comparaciones múltiples entre los sensores

Ejemplo

Se proponen cuatro diferentes tipos de sensores para controlar la temperatura de los refrigeradores.

Se desea establecer cuál de estos sensores hacen que un refrigerador haga el tiempo de paro en el menor tiempo y que las condiciones de enfriamiento sean las mismas en todos los casos.

Se preparan los refrigeradores para que todos operen bajo las mismas condiciones.

La finalidad es realizar comparaciones múltiples entre los sensores

Ejemplo

Se proponen cuatro diferentes tipos de sensores para controlar la temperatura de los refrigeradores.

Se desea establecer cuál de estos sensores hacen que un refrigerador haga el tiempo de paro en el menor tiempo y que las condiciones de enfriamiento sean las mismas en todos los casos.

Se preparan los refrigeradores para que todos operen bajo las mismas condiciones.

La finalidad es realizar comparaciones múltiples entre los sensores

Ejemplo

Hipótesis de investigación. Algunos sensores pueden reducir el tiempo de paro en los refrigeradores manteniendo idénticas condiciones de enfriamiento.

Tratamientos. Observe que el factor es el tipo de sensor, y cada uno de los cuatro sensores representa los niveles del factor.

Estos niveles definen los tratamientos S_1, S_2, S_3, y S_4.

Análisis de varianza: ANDEVA

Ejemplo

Hipótesis de investigación. Algunos sensores pueden reducir el tiempo de paro en los refrigeradores manteniendo idénticas condiciones de enfriamiento.

Tratamientos. Observe que el factor es el tipo de sensor, y cada uno de los cuatro sensores representa los niveles del factor.

Estos niveles definen los tratamientos S_1, S_2, S_3, y S_4.

Análisis de varianza: ANDEVA

Ejemplo

Hipótesis de investigación. Algunos sensores pueden reducir el tiempo de paro en los refrigeradores manteniendo idénticas condiciones de enfriamiento.

Tratamientos. Observe que el factor es el tipo de sensor, y cada uno de los cuatro sensores representa los niveles del factor.

Estos niveles definen los tratamientos S_1, S_2, S_3, y S_4.

Análisis de varianza: ANDEVA

Ejemplo

Hipótesis de investigación. Algunos sensores pueden reducir el tiempo de paro en los refrigeradores manteniendo idénticas condiciones de enfriamiento.

Tratamientos. Observe que el factor es el tipo de sensor, y cada uno de los cuatro sensores representa los niveles del factor.

Estos niveles definen los tratamientos S_1, S_2, S_3, y S_4.

Análisis de varianza: ANDEVA

Resultados experimentales y estimación de los efectos

Tratamiento	S_1	S_2	S_3	S_4
Repetición 1	10.31	7.35	9.46	5.47
Repetición 2	9.26	7.59	10.45	5.22
Repetición 3	11.07	7.47	10.25	5.03
Promedio $\overline{y}_{i\bullet}$ =	10.213	7.470	10.053	5.030
Varianza S_i^2 =	0.826	0.014	0.274	0.049
Gl	2	2	2	2

$$\overbrace{\hat{\delta}_1}^{efectos} = \overline{y}_{1.} - y_{..} = (10.213 - 8.244) = 1.969$$

$$\hat{\delta}_2 = \overline{y}_{2.} - y_{..} = (7.470 - 8.244) = -0.774$$

$$\hat{\delta}_3 = \overline{y}_{3.} - y_{..} = (10.053 - 8.244) = 1.809$$

$$\hat{\delta}_4 = \overline{y}_{4.} - y_{..} = (5.240 - 8.244) = -3.004$$

Resultados experimentales y estimación de los efectos

Tratamiento	S_1	S_2	S_3	S_4
Repetición 1	10.31	7.35	9.46	5.47
Repetición 2	9.26	7.59	10.45	5.22
Repetición 3	11.07	7.47	10.25	5.03
Promedio $\overline{y}_{i\bullet}$ =	10.213	7.470	10.053	5.030
Varianza S_i^2 =	0.826	0.014	0.274	0.049
Gl	2	2	2	2

$$\overbrace{\hat{\delta}_1}^{efectos} = \overline{y}_{1.} - y_{..} = (10.213 - 8.244) = 1.969$$

$$\hat{\delta}_2 = \overline{y}_{2.} - y_{..} = (7.470 - 8.244) = -0.774$$

$$\hat{\delta}_3 = \overline{y}_{3.} - y_{..} = (10.053 - 8.244) = 1.809$$

$$\hat{\delta}_4 = \overline{y}_{4.} - y_{..} = (5.240 - 8.244) = -3.004$$

Cálculo del estadístico de prueba F_c

$$\overbrace{CM_{trat}}^{Cuadrados-medios} = \frac{3[(1.969)^2+(-0.774)^2+(1.809)^2+(-3.004)^2]}{3} = \frac{50.325}{3} = 16.775$$

$$CM_{error} = \frac{2(0.826+0.014+0.274+0.049)}{8} = 0.291$$

$$\overbrace{RV}^{Estadístico-de-prueba} = F_c = \frac{16.775}{0.291} = 57.69$$

Cálculo del estadístico de prueba F_c

$$\overbrace{CM_{trat}}^{Cuadrados-medios} = \frac{3[(1.969)^2+(-0.774)^2+(1.809)^2+(-3.004)^2]}{3} = \frac{50.325}{3} = 16.775$$

$$CM_{error} = \frac{2(0.826+0.014+0.274+0.049)}{8} = 0.291$$

$$\overbrace{RV}^{Estad\acute{\imath}stico-de-prueba} = F_c = \frac{16.775}{0.291} = 57.69$$

Cálculo del estadístico de prueba F_c

$$\overbrace{CM_{trat}}^{Cuadrados-medios} = \frac{3[(1.969)^2+(-0.774)^2+(1.809)^2+(-3.004)^2]}{3} = \frac{50.325}{3} = 16.775$$

$$CM_{error} = \frac{2(0.826+0.014+0.274+0.049)}{8} = 0.291$$

$$\overbrace{RV}^{Estadístico-de-prueba} = F_c = \frac{16.775}{0.291} = 57.69$$

Resumen: Tabla del Análisis de la Varianza

Fuente	Gl	SC	CM	F_c =rv	valor-p
Tratamiento	3	50.325	16.775	57.69	0.000
Error	8	2.326	0.291		
Total	11	52.651			

Nota. Fuente: Fuente de variación, Gl: Grados de libertad, SC: Suma de cuadrados, CM: Cuadrado medio

Decisión y conlusión de la prueba

Buscando en tablas de una distribución F con 3 y 8 grados de libertad y $\alpha = 0.05$, se tiene F(3, 8, 0.05) = 4.07, F_c> 4.07

Este resultado indica que los datos no apoyan a la hipótesis nula y se concluye que alguno de los sensores hace que el tiempo de paro de los refrigeradores sea diferente.

Otra alternativa para probar la hipótesis, consiste en utilizar el nivel de significancia descriptivo (nsd), valor-p=P(F≥57.69) = 0.00001

Decisión y conlusión de la prueba

Buscando en tablas de una distribución F con 3 y 8 grados de libertad y $\alpha = 0.05$, se tiene F(3, 8, 0.05) = 4.07, F_c> 4.07

Este resultado indica que los datos no apoyan a la hipótesis nula y se concluye que alguno de los sensores hace que el tiempo de paro de los refrigeradores sea diferente.

Otra alternativa para probar la hipótesis, consiste en utilizar el nivel de significancia descriptivo (nsd), valor-p=P(F≥57.69) = 0.00001

Decisión y conlusión de la prueba

Buscando en tablas de una distribución F con 3 y 8 grados de libertad y $\alpha = 0.05$, se tiene F(3, 8, 0.05) = 4.07, F_c> 4.07

Este resultado indica que los datos no apoyan a la hipótesis nula y se concluye que alguno de los sensores hace que el tiempo de paro de los refrigeradores sea diferente.

Otra alternativa para probar la hipótesis, consiste en utilizar el nivel de significancia descriptivo (nsd), valor-p=P(F$\geq$57.69) = 0.00001

Análisis estadístico complementario

Intervalos de confianza.

- Una vez que se ha realizado el experimento, la información generada nos proporciona un mayor conocimiento de los tratamientos para hacer inferencia estadística.
- Por ejemplo la estimación por intervalo de confianza de cada sensor.
- Recuerde que un intervalo de $(1-\alpha)\%$ de confianza para la media μ_i se expresa por:

$$\left(\overline{y}_{i.} + t(gl, \frac{\alpha}{2})\frac{S}{\sqrt{n_i}},\ \overline{y}_{i.} + t(gl, (1-\frac{\alpha}{2}))\frac{S}{\sqrt{n_i}}\right)$$

- $\overline{y}_{i.}$ es la media del i-ésimo tratamiento; (gl, α) es el valor correspondiente a la distribución de probabilidad t de Student para los grados (gl) y el valor de α

Análisis estadístico complementario

Intervalos de confianza.

- Una vez que se ha realizado el experimento, la información generada nos proporciona un mayor conocimiento de los tratamientos para hacer inferencia estadística.
- Por ejemplo la estimación por intervalo de confianza de cada sensor.
- Recuerde que un intervalo de $(1-\alpha)\%$ de confianza para la media μ_i se expresa por:

$$\left(\overline{y}_{i.} + t(gl, \frac{\alpha}{2})\frac{S}{\sqrt{n_i}},\ \overline{y}_{i.} + t(gl, (1-\frac{\alpha}{2}))\frac{S}{\sqrt{n_i}}\right)$$

- $\overline{y}_{i.}$ es la media del i-ésimo tratamiento; (gl, α) es el valor correspondiente a la distribución de probabilidad t de Student para los grados (gl) y el valor de α

Análisis estadístico complementario

Intervalos de confianza.

- Una vez que se ha realizado el experimento, la información generada nos proporciona un mayor conocimiento de los tratamientos para hacer inferencia estadística.
- Por ejemplo la estimación por intervalo de confianza de cada sensor.
- Recuerde que un intervalo de $(1-\alpha)\%$ de confianza para la media μ_i se expresa por:

$$\left(\overline{y}_{i.} + t(gl, \frac{\alpha}{2})\frac{S}{\sqrt{n_i}},\ \overline{y}_{i.} + t(gl, (1-\frac{\alpha}{2}))\frac{S}{\sqrt{n_i}}\right)$$

- $\overline{y}_{i.}$ es la media del i-ésimo tratamiento; (gl, α) es el valor correspondiente a la distribución de probabilidad t de Student para los grados (gl) y el valor de α

Análisis estadístico complementario

Intervalos de confianza.

- Una vez que se ha realizado el experimento, la información generada nos proporciona un mayor conocimiento de los tratamientos para hacer inferencia estadística.
- Por ejemplo la estimación por intervalo de confianza de cada sensor.
- Recuerde que un intervalo de $(1-\alpha)\%$ de confianza para la media μ_i se expresa por:

$$\left(\overline{y}_{i.} + t(gl, \frac{\alpha}{2})\frac{S}{\sqrt{n_i}},\ \overline{y}_{i.} + t(gl, (1-\frac{\alpha}{2}))\frac{S}{\sqrt{n_i}}\right)$$

- $\overline{y}_{i.}$ es la media del i-ésimo tratamiento; (gl, α) es el valor correspondiente a la distribución de probabilidad t de Student para los grados (gl) y el valor de α

Intervalos de confianza

Cálculo de intervalos de confianza de los sensores

El numerador en $\frac{S}{\sqrt{n_i}}$ es la raíz cuadrada de los cuadrados medios del error y el denominador es el tamaño de muestra en cada tratamiento.

$\mu_i \in (\overline{y}_{i.} + t(8, 0.025)\frac{S}{\sqrt{3}},\ \overline{y}_{i.} + t(8, 0.975)\frac{S}{\sqrt{3}})$ *Ejemplo para* μ_1.
$\mu_1 \in (8.52 - 2.31 * 0.229, 8.52 + 2.31 * 0.229)$. $\mu_1 \in (7.991, 9.049)$
$\mu_2 \in (5.171, 6.229)$
$\mu_3 \in (7.451, 8.509)$
$\mu_4 \in (2.991, 4.049)$

Comparaciones entre tratamientos

A partir del concepto del intervalo de confianza y de haber rechazado la hipótesis de igualdad de efectos, se puede realizar las comparaciones dos a dos entre tratamientos.

En este caso el parámetro de referencia es la diferencia entre las respuestas medias de los tratamientos. Es decir $\gamma = \mu_i - \mu_j$.

Intervalos de confianza

Cálculo de intervalos de confianza de los sensores

El numerador en $\frac{S}{\sqrt{n_i}}$ es la raíz cuadrada de los cuadrados medios del error y el denominador es el tamaño de muestra en cada tratamiento.

$\mu_i \in (\overline{y}_{i.} + t(8, 0.025)\frac{S}{\sqrt{3}},\ \overline{y}_{i.} + t(8, 0.975)\frac{S}{\sqrt{3}})$ *Ejemplo para* μ_1.
$\mu_1 \in (8.52 - 2.31 * 0.229, 8.52 + 2.31 * 0.229)$. $\mu_1 \in (7.991, 9.049)$
$\mu_2 \in (5.171, 6.229)$
$\mu_3 \in (7.451, 8.509)$
$\mu_4 \in (2.991, 4.049)$

Comparaciones entre tratamientos

A partir del concepto del intervalo de confianza y de haber rechazado la hipótesis de igualdad de efectos, se puede realizar las comparaciones dos a dos entre tratamientos.

En este caso el parámetro de referencia es la diferencia entre las respuestas medias de los tratamientos. Es decir $\gamma = \mu_i - \mu_j$.

Intervalos de confianza

Cálculo de intervalos de confianza de los sensores

El numerador en $\frac{S}{\sqrt{n_i}}$ es la raíz cuadrada de los cuadrados medios del error y el denominador es el tamaño de muestra en cada tratamiento.

$\mu_i \in (\overline{y}_{i.} + t(8, 0.025)\frac{S}{\sqrt{3}},\ \overline{y}_{i.} + t(8, 0.975)\frac{S}{\sqrt{3}})$ *Ejemplo para* μ_1.
$\mu_1 \in (8.52 - 2.31 * 0.229, 8.52 + 2.31 * 0.229)$. $\mu_1 \in (7.991, 9.049)$
$\mu_2 \in (5.171, 6.229)$
$\mu_3 \in (7.451, 8.509)$
$\mu_4 \in (2.991, 4.049)$

Comparaciones entre tratamientos

A partir del concepto del intervalo de confianza y de haber rechazado la hipótesis de igualdad de efectos, se puede realizar las comparaciones dos a dos entre tratamientos.

En este caso el parámetro de referencia es la diferencia entre las respuestas medias de los tratamientos. Es decir $\gamma = \mu_i - \mu_j$.

Intervalos de confianza

Cálculo de intervalos de confianza de los sensores

El numerador en $\frac{S}{\sqrt{n_i}}$ es la raíz cuadrada de los cuadrados medios del error y el denominador es el tamaño de muestra en cada tratamiento.

$\mu_i \in (\overline{y}_{i.} + t(8, 0.025)\frac{S}{\sqrt{3}},\ \overline{y}_{i.} + t(8, 0.975)\frac{S}{\sqrt{3}})$ *Ejemplo para* μ_1.
$\mu_1 \in (8.52 - 2.31 * 0.229, 8.52 + 2.31 * 0.229)$. $\mu_1 \in (7.991, 9.049)$
$\mu_2 \in (5.171, 6.229)$
$\mu_3 \in (7.451, 8.509)$
$\mu_4 \in (2.991, 4.049)$

Comparaciones entre tratamientos

A partir del concepto del intervalo de confianza y de haber rechazado la hipótesis de igualdad de efectos, se puede realizar las comparaciones dos a dos entre tratamientos.

En este caso el parámetro de referencia es la diferencia entre las respuestas medias de los tratamientos. Es decir $\gamma = \mu_i - \mu_j$.

Comparaciones múltiples

Comparaciones múltiples por intervalo

En general un intervalo de confianza al construirse permite afirmar que con un nivel de confianza 100(1-α) % se espera que $\gamma \in I(\hat{\gamma})$ donde $I(\hat{\gamma})$ representa un intervalo construido a partir de una estimación de γ; por ejemplo

$$\hat{\gamma} = \widehat{\mu}_i - \widehat{\mu}_j = \overline{y}_{i.} - \overline{y}_{j.}$$

Típicamente el intervalo de confianza para γ será de la forma

$\gamma \in \widehat{\gamma} \pm Q(\widehat{\gamma}, \alpha)x$ (estimación del error estandar de $\widehat{\gamma}$)

$Q(\widehat{\gamma}, \alpha)$representa un cuantil de orden α de la distribución muestral asociada a $\widehat{\gamma}$ y dependiente del tipo de comparación a realizar

Comparaciones múltiples

Comparaciones múltiples por intervalo

En general un intervalo de confianza al construirse permite afirmar que con un nivel de confianza 100(1-α) % se espera que $\gamma \in I(\hat{\gamma})$ donde $I(\hat{\gamma})$ representa un intervalo construido a partir de una estimación de γ; por ejemplo

$$\hat{\gamma} = \widehat{\mu}_i - \widehat{\mu}_j = \overline{y}_{i.} - \overline{y}_{j.}$$

Típicamente el intervalo de confianza para γ será de la forma

$\gamma \in \widehat{\gamma} \pm Q(\widehat{\gamma}, \alpha)x$ (estimación del error estandar de $\widehat{\gamma}$)

$Q(\widehat{\gamma}, \alpha)$representa un cuantil de orden α de la distribución muestral asociada a $\widehat{\gamma}$ y dependiente del tipo de comparación a realizar

Comparaciones múltiples
Por intervalo de confianza

El procedimiento para realizar comparaciones múltiples

- Ordene las medias de menor a mayor, digamos, $\overline{y}_{(1)} < \overline{y}_{(2)} < ... < \overline{y}_{(k)}$ donde $\overline{y}_{(i)}$ representa la i-ésima media ordenada
- Compare $\overline{y}_{(k)} - \overline{y}_{(i)}$
- Construya el intervalo de confianza para $\mu_{(k)} - \mu_{(l)}$ como $\overline{y}_{(k)} - \overline{y}_{(i)} \pm Q(\widehat{\theta}, \alpha)\widehat{\sigma}\sqrt{\frac{2}{n}}$
- Infiera, si el intervalo contiene el valor cero entonces,

$$\mu_{(k)} = \mu_{(l)}$$

Por ende todas las medias de tratamientos se consideran iguales estadísticamente.

Si el intervalo no lo contiene,

$$\mu_{(k)} \neq \mu_{(l)}$$

Son significativamente diferentes

Comparaciones múltiples

Por intervalo de confianza

El procedimiento para realizar comparaciones múltiples

- Ordene las medias de menor a mayor, digamos, $\overline{y}_{(1)} < \overline{y}_{(2)} < ... < \overline{y}_{(k)}$ donde $\overline{y}_{(i)}$ representa la i-ésima media ordenada
- Compare $\overline{y}_{(k)} - \overline{y}_{(i)}$
- Construya el intervalo de confianza para $\mu_{(k)} - \mu_{(l)}$ como $\overline{y}_{(k)} - \overline{y}_{(i)} \pm Q(\widehat{\theta}, \alpha)\widehat{\sigma}\sqrt{\frac{2}{n}}$
- Infiera, si el intervalo contiene el valor cero entonces,

$$\mu_{(k)} = \mu_{(l)}$$

Por ende todas las medias de tratamientos se consideran iguales estadísticamente.

Si el intervalo no lo contiene,

$$\mu_{(k)} \neq \mu_{(l)}$$

Son significativamente diferentes

Comparaciones múltiples
Por intervalo de confianza

El procedimiento para realizar comparaciones múltiples

- Ordene las medias de menor a mayor, digamos, $\overline{y}_{(1)} < \overline{y}_{(2)} < ... < \overline{y}_{(k)}$ donde $\overline{y}_{(i)}$ representa la i-ésima media ordenada
- Compare $\overline{y}_{(k)} - \overline{y}_{(i)}$
- Construya el intervalo de confianza para $\mu_{(k)} - \mu_{(l)}$ como $\overline{y}_{(k)} - \overline{y}_{(i)} \pm Q(\widehat{\theta}, \alpha)\widehat{\sigma}\sqrt{\frac{2}{n}}$
- Infiera, si el intervalo contiene el valor cero entonces,

$$\mu_{(k)} = \mu_{(l)}$$

Por ende todas las medias de tratamientos se consideran iguales estadísticamente.

Si el intervalo no lo contiene,

$$\mu_{(k)} \neq \mu_{(l)}$$

Son significativamente diferentes

Comparaciones múltiples

Por intervalo de confianza

El procedimiento para realizar comparaciones múltiples

- Ordene las medias de menor a mayor, digamos, $\overline{y}_{(1)} < \overline{y}_{(2)} < ... < \overline{y}_{(k)}$ donde $\overline{y}_{(i)}$ representa la i-ésima media ordenada
- Compare $\overline{y}_{(k)} - \overline{y}_{(i)}$
- Construya el intervalo de confianza para $\mu_{(k)} - \mu_{(l)}$ como $\overline{y}_{(k)} - \overline{y}_{(i)} \pm Q(\widehat{\theta}, \alpha)\widehat{\sigma}\sqrt{\frac{2}{n}}$
- Infiera, si el intervalo contiene el valor cero entonces,

$$\mu_{(k)} = \mu_{(l)}$$

Por ende todas las medias de tratamientos se consideran iguales estadísticamente.

Si el intervalo no lo contiene,

$$\mu_{(k)} \neq \mu_{(l)}$$

Son significativamente diferentes

Comparaciones múltiples

Por intervalo de confianza

El procedimiento para realizar comparaciones múltiples continúa

- Realice las siguientes comparaciones

$$\overline{y}_{(k)} - \overline{y}_{(2)}$$

$$\overline{y}_{(k-1)} - \overline{y}_{(2)}$$

- Construya los intervalos de confianza correspondientes a $\mu_{(k-1)} - \mu_{(2)}$ y $\mu_{(k)} - \mu_{(2)}$ que resultan

$$\overline{y}_{(k)} - \overline{y}_{(2)} \pm Q(\widehat{\theta}, \alpha)\widehat{\sigma}\sqrt{\frac{2}{n}}$$

$$\overline{y}_{(k-1)} - \overline{y}_{(2)} \pm Q(\widehat{\theta}, \alpha)\widehat{\sigma}\sqrt{\frac{2}{n}}$$

respectivamente. Si ambos intervalos contienen al cero se concluye que

$$\mu_{(k)} = \mu_{(2)}$$

$$\mu_{(k-1)} = \mu_{(2)}$$

Comparaciones múltiples
Por intervalo de confianza

El procedimiento para realizar comparaciones múltiples continúa

- Realice las siguientes comparaciones

$$\overline{y}_{(k)} - \overline{y}_{(2)}$$

$$\overline{y}_{(k-1)} - \overline{y}_{(2)}$$

- Construya los intervalos de confianza correspondientes a $\mu_{(k-1)} - \mu_{(2)}$ y $\mu_{(k)} - \mu_{(2)}$ que resultan

$$\overline{y}_{(k)} - \overline{y}_{(2)} \pm Q(\widehat{\theta}, \alpha)\widehat{\sigma}\sqrt{\frac{2}{n}}$$

$$\overline{y}_{(k-1)} - \overline{y}_{(2)} \pm Q(\widehat{\theta}, \alpha)\widehat{\sigma}\sqrt{\frac{2}{n}}$$

respectivamente. Si ambos intervalos contienen al cero se concluye que

$$\mu_{(k)} = \mu_{(2)}$$

$$\mu_{(k-1)} = \mu_{(2)}$$

Comparaciones múltiples
Por intervalo de confianza

El procedimiento para realizar comparaciones múltiples continúa

- Si cualquiera de estos intervalos no contiene al valor cero declare las medias correspondientes como diferentes estadísticamente.
- Siga análogamente hasta completar las comparaciones necesarias

Nota. En la lección 3.2 se presentará el algoritmo en R para realizar las diferentes comparaciones entre medias en k tratamientos. Considerando los diferentes métodos de comparaciones múltiples.

Comparaciones múltiples

Por intervalo de confianza

El procedimiento para realizar comparaciones múltiples continúa

- Si cualquiera de estos intervalos no contiene al valor cero declare las medias correspondientes como diferentes estadísticamente.
- Siga análogamente hasta completar las comparaciones necesarias

Nota. En la lección 3.2 se presentará el algoritmo en R para realizar las diferentes comparaciones entre medias en k tratamientos. Considerando los diferentes métodos de comparaciones múltiples.

Comparaciones planeadas entre dos medias

Prueba de Tukey

Prueba de Tukey

- Esta prueba permite comparar dos a dos todos los tratamientos.
- Potencialmente en total se tendrán $\binom{k}{2}$ comparaciones.
- El estadístico propuesto por Tukey-Kramer se muestra en la siguiente expresión:

$$T = \frac{q(k, f, \alpha)}{\sqrt{2}} \sqrt{CM_{error}(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j})}$$

- n_i y n_j son los tamaños de muestra para cada tratamiento
- $q(k, f, \alpha)$ es el rango estudentizado que varía para k tratamientos, f grados de libertad para el error y α el nivel de significancia. Ver la tabla F en la página 484 del libro.
- CM_{error} representa al estimador de la varianza del error experimental.

Comparaciones planeadas entre dos medias
Prueba de Tukey

Prueba de Tukey

- Esta prueba permite comparar dos a dos todos los tratamientos.
- Potencialmente en total se tendrán $\binom{k}{2}$ comparaciones.
- El estadístico propuesto por Tukey-Kramer se muestra en la siguiente expresión:

$$T = \frac{q(k, f, \alpha)}{\sqrt{2}} \sqrt{CM_{error}(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j})}$$

- n_i y n_j son los tamaños de muestra para cada tratamiento
- $q(k, f, \alpha)$ es el rango estudentizado que varía para k tratamientos, f grados de libertad para el error y α el nivel de significancia. Ver la tabla F en la página 484 del libro.
- CM_{error} representa al estimador de la varianza del error experimental.

Comparaciones planeadas entre dos medias

Prueba de Tukey

Prueba de Tukey

- Esta prueba permite comparar dos a dos todos los tratamientos.
- Potencialmente en total se tendrán $\binom{k}{2}$ comparaciones.
- El estadístico propuesto por Tukey-Kramer se muestra en la siguiente expresión:

$$T = \frac{q(k,f,\alpha)}{\sqrt{2}} \sqrt{CM_{error}(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j})}$$

- n_i y n_j son los tamaños de muestra para cada tratamiento
- $q(k,f,\alpha)$ es el rango estudentizado que varía para k tratamientos, f grados de libertad para el error y α el nivel de significancia. Ver la tabla F en la página 484 del libro.
- CM_{error} representa al estimador de la varianza del error experimental.

Comparaciones planeadas entre dos medias

Prueba de Tukey

Prueba de Tukey

- Esta prueba permite comparar dos a dos todos los tratamientos.
- Potencialmente en total se tendrán $\binom{k}{2}$ comparaciones.
- El estadístico propuesto por Tukey-Kramer se muestra en la siguiente expresión:

$$T = \frac{q(k,f,\alpha)}{\sqrt{2}}\sqrt{CM_{error}(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_j})}$$

- n_i y n_j son los tamaños de muestra para cada tratamiento
- $q(k,f,\alpha)$ es el rango estudentizado que varía para k tratamientos, f grados de libertad para el error y α el nivel de significancia. Ver la tabla F en la página 484 del libro.
- CM_{error} representa al estimador de la varianza del error experimental.

Comparaciones planeadas entre dos medias

Prueba de Tukey

Prueba de Tukey

- Esta prueba permite comparar dos a dos todos los tratamientos.
- Potencialmente en total se tendrán $\binom{k}{2}$ comparaciones.
- El estadístico propuesto por Tukey-Kramer se muestra en la siguiente expresión:

$$T = \frac{q(k,f,\alpha)}{\sqrt{2}}\sqrt{CM_{error}(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_j})}$$

- n_i y n_j son los tamaños de muestra para cada tratamiento
- $q(k,f,\alpha)$ es el rango estudentizado que varía para k tratamientos, f grados de libertad para el error y α el nivel de significancia. Ver la tabla F en la página 484 del libro.
- CM_{error} representa al estimador de la varianza del error experimental.

Comparaciones planeadas entre dos medias

Prueba de Tukey

Prueba de Tukey

- Esta prueba permite comparar dos a dos todos los tratamientos.
- Potencialmente en total se tendrán $\binom{k}{2}$ comparaciones.
- El estadístico propuesto por Tukey-Kramer se muestra en la siguiente expresión:

$$T = \frac{q(k,f,\alpha)}{\sqrt{2}}\sqrt{CM_{error}(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_j})}$$

- n_i y n_j son los tamaños de muestra para cada tratamiento
- $q(k,f,\alpha)$ es el rango estudentizado que varía para k tratamientos, f grados de libertad para el error y α el nivel de significancia. Ver la tabla F en la página 484 del libro.
- CM_{error} representa al estimador de la varianza del error experimental.

Comparaciones planeadas entre dos medias

Prueba de Tukey

La hipótesis para contrastar

$$H_0 : \mu_i - \mu_j = 0$$

$$H_1 : \mu_i - \mu_j \neq 0$$

- Si los datos apoyan a H_1, se dice que existe diferencia entre tratamientos y en particular el tratamiento i es mayor en promedio que el tratamiento j.
- Aquí se concluye que el tratamiento i es mayor porque las medias se ordenan de mayor a menor, tal punto se ilustrará más adelante.
- Los intervalos de confianza correspondientes para comparar μ_i y μ_j resultan ser

$$\overline{y}_{i.} - \overline{y}_{j.} - T < \mu_i - \mu_j < \overline{y}_{i.} - \overline{y}_{j.} + T$$

- La prueba de Tukey está diseñada para garantizar que todas las comparaciones tengan en global una confianza del

$$100(1 - \alpha(FC))\%$$

Comparaciones planeadas entre dos medias

Prueba de Tukey

La hipótesis para contrastar

$$H_0 : \mu_i - \mu_j = 0$$

$$H_1 : \mu_i - \mu_j \neq 0$$

- Si los datos apoyan a H_1, se dice que existe diferencia entre tratamientos y en particular el tratamiento i es mayor en promedio que el tratamiento j.
- Aquí se concluye que el tratamiento i es mayor porque las medias se ordenan de mayor a menor, tal punto se ilustrará más adelante.
- Los intervalos de confianza correspondientes para comparar μ_i y μ_j resultan ser

$$\overline{y}_{i.} - \overline{y}_{j.} - T < \mu_i - \mu_j < \overline{y}_{i.} - \overline{y}_{j.} + T$$

- La prueba de Tukey está diseñada para garantizar que todas las comparaciones tengan en global una confianza del

$$100(1 - \alpha(FC))\%$$

Comparaciones planeadas entre dos medias

Prueba de Tukey

La hipótesis para contrastar

$$H_0 : \mu_i - \mu_j = 0$$

$$H_1 : \mu_i - \mu_j \neq 0$$

- Si los datos apoyan a H_1, se dice que existe diferencia entre tratamientos y en particular el tratamiento i es mayor en promedio que el tratamiento j.
- Aquí se concluye que el tratamiento i es mayor porque las medias se ordenan de mayor a menor, tal punto se ilustrará más adelante.
- Los intervalos de confianza correspondientes para comparar μ_i y μ_j resultan ser

$$\overline{y}_{i.} - \overline{y}_{j.} - T < \mu_i - \mu_j < \overline{y}_{i.} - \overline{y}_{j.} + T$$

- La prueba de Tukey está diseñada para garantizar que todas las comparaciones tengan en global una confianza del

$$100(1 - \alpha(FC))\%$$

Comparaciones planeadas entre dos medias

Prueba de Tukey

La hipótesis para contrastar

$$H_0 : \mu_i - \mu_j = 0$$

$$H_1 : \mu_i - \mu_j \neq 0$$

- Si los datos apoyan a H_1, se dice que existe diferencia entre tratamientos y en particular el tratamiento i es mayor en promedio que el tratamiento j.
- Aquí se concluye que el tratamiento i es mayor porque las medias se ordenan de mayor a menor, tal punto se ilustrará más adelante.
- Los intervalos de confianza correspondientes para comparar μ_i y μ_j resultan ser

$$\overline{y}_{i.} - \overline{y}_{j.} - T < \mu_i - \mu_j < \overline{y}_{i.} - \overline{y}_{j.} + T$$

- La prueba de Tukey está diseñada para garantizar que todas las comparaciones tengan en global una confianza del
$$100(1 - \alpha(FC))\%$$

Resultados Prueba de Tukey

Análisis estadístico prueba de hipótesis reportado por minitab

```
Grouping Information Using Tukey Method

trat   N     Mean  Grouping
1      3  10.2133  A
3      3  10.0533  A
2      3   7.4700    B
4      3   5.2400      C

Means that do not share a letter are significantly different.
```

Diferencias significativas porque se rechaza la hipótesis nula.

- $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$
- $\mu_1 - \mu_4 \neq 0$
- $\mu_2 - \mu_3 \neq 0$
- $\mu_2 - \mu_4 \neq 0$
- $\mu_3 - \mu_4 \neq 0$

Resultados Prueba de Tukey

Análisis estadístico por intervalos de confianza reportado por minitab

```
Tukey 95% Simultaneous Confidence Intervals
All Pairwise Comparisons among Levels of trat

Individual confidence level = 98.74%


trat = 1 subtracted from:

trat    Lower   Center    Upper  --------+---------+---------+---------+-
2     -4.1537  -2.7433  -1.3330        (---*---)
3     -1.5704  -0.1600   1.2504                (---*---)
4     -6.3837  -4.9733  -3.5630  (---*---)
                                 --------+---------+---------+---------+-
                                      -3.5       0.0       3.5       7.0


trat = 2 subtracted from:

trat    Lower   Center    Upper  --------+---------+---------+---------+-
3      1.1730   2.5833   3.9937                       (---*---)
4     -3.6404  -2.2300  -0.8196          (---*---)
                                 --------+---------+---------+---------+-
                                      -3.5       0.0       3.5       7.0


trat = 3 subtracted from:

trat    Lower   Center    Upper  --------+---------+---------+---------+-
4     -6.2237  -4.8133  -3.4030  (---*---)
                                 --------+---------+---------+---------+-
                                      -3.5       0.0       3.5       7.0
```

Diferencias significativas porque el intervalo no contiene al cero.

- $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$
- $\mu_1 - \mu_4 \neq 0$
- $\mu_2 - \mu_3 \neq 0$
- $\mu_2 - \mu_4 \neq 0$
- $\mu_3 - \mu_4 \neq 0$

Prueba de Dunnett

Planteamiento de las diferencias de interés planeadas con el control μ_0

Suponga entonces que las diferencias de interés planeadas son:

$$\mu_i - \mu_0, i = 1, ..., k-1$$

Definición de la prueba de Dunnett denotada por D

$$D = d(k-1, f, \alpha)\sqrt{CM_{error}(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_0})}$$

donde el cuantil $d(k-1, f, \alpha)$, f es igual a los gl correspondiente al error y los valores del estadístico D, ver la Tabla G págona 484 del libro.

Intervalos de confianza para la prueba de Dunnett

$$\bar{y}_{i.} - \bar{y}_0 \pm D, \quad i = 1, ...k-1$$

contiene el valor cero, se considerará que: $\mu_i = \mu_0$

Prueba de Dunnett

Planteamiento de las diferencias de interés planeadas con el control μ_0

Suponga entonces que las diferencias de interés planeadas son:

$$\mu_i - \mu_0, i = 1, ..., k-1$$

Definición de la prueba de Dunnett denotada por D

$$D = d(k-1, f, \alpha)\sqrt{CM_{error}(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_0})}$$

donde el cuantil $d(k-1, f, \alpha)$, f es igual a los gl correspondiente al error y los valores del estadístico D, ver la Tabla G págona 484 del libro.

Intervalos de confianza para la prueba de Dunnett

$$\bar{y}_{i.} - \bar{y}_0 \pm D, \quad i = 1, ...k-1$$

contiene el valor cero, se considerará que: $\mu_i = \mu_0$

Prueba de Dunnett

Planteamiento de las diferencias de interés planeadas con el control μ_0

Suponga entonces que las diferencias de interés planeadas son:

$$\mu_i - \mu_0, i = 1, ..., k-1$$

Definición de la prueba de Dunnett denotada por D

$$D = d(k-1, f, \alpha)\sqrt{CM_{error}(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_0})}$$

donde el cuantil $d(k-1, f, \alpha)$, f es igual a los gl correspondiente al error y los valores del estadístico D, ver la Tabla G págona 484 del libro.

Intervalos de confianza para la prueba de Dunnett

$$\bar{y}_{i.} - \bar{y}_0 \pm D, \quad i = 1, ...k-1$$

contiene el valor cero, se considerará que: $\mu_i = \mu_0$

Resultados Prueba de Dunnett

Análisis estadístico reportado por minitab

Diferencias significativas

Prueba de hipótesis

```
Grouping Information Using Dunnett Method

Level         N     Mean  Grouping
4 (control)   3   5.2400  A
1             3  10.2133
3             3  10.0533
2             3   7.4700

Means not labeled with letter A are significantly different from control level
     mean.
```

Intervalo de confianza

```
Dunnett's comparisons with a control

Family error rate = 0.05
Individual error rate = 0.0205

Critical value = 2.88

Control = level (4) of trat

Intervals for treatment mean minus control mean

Level    Lower  Center   Upper  ----+---------+---------+---------+-----
1       3.7054  4.9733  6.2413                     (-------*--------)
2       0.9621  2.2300  3.4979  (--------*-------)
3       3.5454  4.8133  6.0813                    (-------*--------)
                                ----+---------+---------+---------+-----
                                  1.5       3.0       4.5       6.0
```

Diferencias significativas porque se rechaza la hipótesis nula o el intervalo no contiene al cero.

- $\mu_1 - \mu_4 \neq 0$
- $\mu_2 - \mu_4 \neq 0$
- $\mu_3 - \mu_4 \neq 0$

Prueba de Hsu

Comparaciones múltiples con el mejor

Las comparaciones de medias a realizar se pueden representar por:

$$\mu_i - max_{j \neq i}(\mu_j),\ \ i = 1, ..., k$$

Si el mejor tratamiento es aquel que produce la menor respuesta, entonces las comparaciones de interés serían:

$$\mu_i - min_{j \neq i}(\mu_j),\ \ i = 1, ..., k$$

Prueba de Hsu

Comparaciones múltiples con el mejor

$$\left[-\left(\hat{\mu}_i - max_{j\neq i}(\hat{\mu_j}) - \Delta\right)^- \ , \ \left(\hat{\mu}_i - max_{j\neq i}(\hat{\mu_j}) + \Delta\right)^+\right],$$

con $i = 1, \ldots, k$, donde $\Delta = d\sqrt{\frac{2\times CM_{error}}{n}}$, d es el valor crítico para la prueba de una cola de Dunnett, $d\left(\alpha, k-1, gl\ CMerror\right)$, y

$$\begin{aligned} -x^- &= \min\{0,x\} = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}, \\ x^+ &= \max\{0,x\} = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}. \end{aligned}$$

Prueba de Hsu

Comparaciones múltiples con el mejor

$$\left[-\left(\hat{\mu}_i - min_{j\neq i}(\hat{\mu_j}) - \Delta\right)^{-}, \left(\hat{\mu}_i - min_{j\neq i}(\hat{\mu_j}) + \Delta\right)^{+}\right]$$

donde $\Delta = d\sqrt{\frac{2\times CM_{error}}{n}}$, con $i = 1, \ldots, k$, que son intervalos correspondientes para

$$(\mu_i - min_{j\neq i}(\mu_j))$$

Resultados Prueba de Hsu

Análisis estadístico reportado por minitab

```
Hsu's MCB (Multiple Comparisons with the Best)

Family error rate = 0.05
Critical value = 2.42

Intervals for level mean minus largest of other level means

Level     Lower    Center    Upper     +---------+---------+---------+---------
1       -0.9040    0.1600   1.2240                              (-----*----)
2       -3.8073   -2.7433   0.0000                 (----*-------------)
3       -1.2240   -0.1600   0.9040                             (----*-----)
4       -6.0373   -4.9733   0.0000     (----*-----------------------)
                                       +---------+---------+---------+---------
                                     -6.0      -4.0      -2.0       0.0
```

Diferencias significativas porque se rechaza la hipótesis nula o el intervalo no contiene al cero.

- $\mu_2 - \mu_1 \neq 0$
- $\mu_4 - \mu_1 \neq 0$

Donde $\Delta = 2.42\sqrt{\frac{2}{3}(0.291)} = 1.065$