

# Lección 9.5: Lectura complementaria

## Función de Deseabilidad: Optimización de procesos

**Alfaomega**

Alfaomega-UAQro.-CIMAT

2017

# Contenido

- 1 Presentación
- 2 Planteamiento de optimización
- 3 Función de Deseabilidad
- 4 Procesos en la industria
- 5 Estimación de modelos
  - Modelo 1
  - Modelo 2
- 6 Caso de estudio: Manufactura de llantas
  - Descripción
  - Ajuste del modelo
  - Optimización del caso de estudio
  - Líneas de investigación

- 1 Descripción de ideas y actividades que se realizarán en esta lección.
  - Se describen los objetivos de la lección 9.5
  - Primero se mostrarán una serie de ideas para motivar el proceso de optimización.
  - Se describe las características de la Función de Deseabilidad.
  - Se presenta la idea de un proceso industrial y sus aplicaciones.
  - Se ilustra la modelación de un procesos químico con la finalidad de resaltar el concepto de la discrepancia, propuesto en la lección 1.2.
  - Con la finalidad de construir el proceso de optimización se presenta un caso de estudio. En la literatura estadística este ejemplo de manufactura se ha utilizado ampliamente.
  - Este se describe y se muestra la solución del caso de estudio, se emplea el paquete estadístico minitab como un auxiliar para este ejemplo.
- 2 El procedimiento del caso de estudio se puede repetir en actividades que realizamos en nuestros trabajos, estudios o investigaciones en medicina, biología, sicología entre otras áreas.

- 1 Descripción de ideas y actividades que se realizarán en esta lección.
  - Se describen los objetivos de la lección 9.5
  - Primero se mostrarán una serie de ideas para motivar el proceso de optimización.
  - Se describe las características de la Función de Deseabilidad.
  - Se presenta la idea de un proceso industrial y sus aplicaciones.
  - Se ilustra la modelación de un procesos químico con la finalidad de resaltar el concepto de la discrepancia, propuesto en la lección 1.2.
  - Con la finalidad de construir el proceso de optimización se presenta un caso de estudio. En la literatura estadística este ejemplo de manufactura se ha utilizado ampliamente.
  - Este se describe y se muestra la solución del caso de estudio, se emplea el paquete estadístico minitab como un auxiliar para este ejemplo.
- 2 El procedimiento del caso de estudio se puede repetir en actividades que realizamos en nuestros trabajos, estudios o investigaciones en medicina, biología, sicología entre otras áreas.

- 1 Descripción de ideas y actividades que se realizarán en esta lección.
  - Se describen los objetivos de la lección 9.5
  - Primero se mostrarán una serie de ideas para motivar el proceso de optimización.
  - Se describe las características de la Función de Deseabilidad.
  - Se presenta la idea de un proceso industrial y sus aplicaciones.
  - Se ilustra la modelación de un procesos químico con la finalidad de resaltar el concepto de la discrepancia, propuesto en la lección 1.2.
  - Con la finalidad de construir el proceso de optimización se presenta un caso de estudio. En la literatura estadística este ejemplo de manufactura se ha utilizado ampliamente.
  - Este se describe y se muestra la solución del caso de estudio, se emplea el paquete estadístico minitab como un auxiliar para este ejemplo.
- 2 El procedimiento del caso de estudio se puede repetir en actividades que realizamos en nuestros trabajos, estudios o investigaciones en medicina, biología, sicología entre otras áreas.

- 1 Descripción de ideas y actividades que se realizarán en esta lección.
  - Se describen los objetivos de la lección 9.5
  - Primero se mostrarán una serie de ideas para motivar el proceso de optimización.
  - Se describe las características de la Función de Deseabilidad.
  - Se presenta la idea de un proceso industrial y sus aplicaciones.
  - Se ilustra la modelación de un procesos químico con la finalidad de resaltar el concepto de la discrepancia, propuesto en la lección 1.2.
  - Con la finalidad de construir el proceso de optimización se presenta un caso de estudio. En la literatura estadística este ejemplo de manufactura se ha utilizado ampliamente.
  - Este se describe y se muestra la solución del caso de estudio, se emplea el paquete estadístico minitab como un auxiliar para este ejemplo.
- 2 El procedimiento del caso de estudio se puede repetir en actividades que realizamos en nuestros trabajos, estudios o investigaciones en medicina, biología, sicología entre otras áreas.

- 1 Descripción de ideas y actividades que se realizarán en esta lección.
  - Se describen los objetivos de la lección 9.5
  - Primero se mostrarán una serie de ideas para motivar el proceso de optimización.
  - Se describe las características de la Función de Deseabilidad.
  - Se presenta la idea de un proceso industrial y sus aplicaciones.
  - Se ilustra la modelación de un procesos químico con la finalidad de resaltar el concepto de la discrepancia, propuesto en la lección 1.2.
  - Con la finalidad de construir el proceso de optimización se presenta un caso de estudio. En la literatura estadística este ejemplo de manufactura se ha utilizado ampliamente.
  - Este se describe y se muestra la solución del caso de estudio, se emplea el paquete estadístico minitab como un auxiliar para este ejemplo.
- 2 El procedimiento del caso de estudio se puede repetir en actividades que realizamos en nuestros trabajos, estudios o investigaciones en medicina, biología, sicología entre otras áreas.

- 1 Descripción de ideas y actividades que se realizarán en esta lección.
  - Se describen los objetivos de la lección 9.5
  - Primero se mostrarán una serie de ideas para motivar el proceso de optimización.
  - Se describe las características de la Función de Deseabilidad.
  - Se presenta la idea de un proceso industrial y sus aplicaciones.
  - Se ilustra la modelación de un procesos químico con la finalidad de resaltar el concepto de la discrepancia, propuesto en la lección 1.2.
  - Con la finalidad de construir el proceso de optimización se presenta un caso de estudio. En la literatura estadística este ejemplo de manufactura se ha utilizado ampliamente.
  - Este se describe y se muestra la solución del caso de estudio, se emplea el paquete estadístico minitab como un auxiliar para este ejemplo.
- 2 El procedimiento del caso de estudio se puede repetir en actividades que realizamos en nuestros trabajos, estudios o investigaciones en medicina, biología, sicología entre otras áreas.



- 1 Descripción de ideas y actividades que se realizarán en esta lección.
  - Se describen los objetivos de la lección 9.5
  - Primero se mostrarán una serie de ideas para motivar el proceso de optimización.
  - Se describe las características de la Función de Deseabilidad.
  - Se presenta la idea de un proceso industrial y sus aplicaciones.
  - Se ilustra la modelación de un procesos químico con la finalidad de resaltar el concepto de la discrepancia, propuesto en la lección 1.2.
  - Con la finalidad de construir el proceso de optimización se presenta un caso de estudio. En la literatura estadística este ejemplo de manufactura se ha utilizado ampliamente.
  - Este se describe y se muestra la solución del caso de estudio, se emplea el paquete estadístico minitab como un auxiliar para este ejemplo.
- 2 El procedimiento del caso de estudio se puede repetir en actividades que realizamos en nuestros trabajos, estudios o investigaciones en medicina, biología, sicología entre otras áreas.

- 1 Descripción de ideas y actividades que se realizarán en esta lección.
  - Se describen los objetivos de la lección 9.5
  - Primero se mostrarán una serie de ideas para motivar el proceso de optimización.
  - Se describe las características de la Función de Deseabilidad.
  - Se presenta la idea de un proceso industrial y sus aplicaciones.
  - Se ilustra la modelación de un procesos químico con la finalidad de resaltar el concepto de la discrepancia, propuesto en la lección 1.2.
  - Con la finalidad de construir el proceso de optimización se presenta un caso de estudio. En la literatura estadística este ejemplo de manufactura se ha utilizado ampliamente.
  - Este se describe y se muestra la solución del caso de estudio, se emplea el paquete estadístico minitab como un auxiliar para este ejemplo.
- 2 El procedimiento del caso de estudio se puede repetir en actividades que realizamos en nuestros trabajos, estudios o investigaciones en medicina, biología, sicología entre otras áreas.

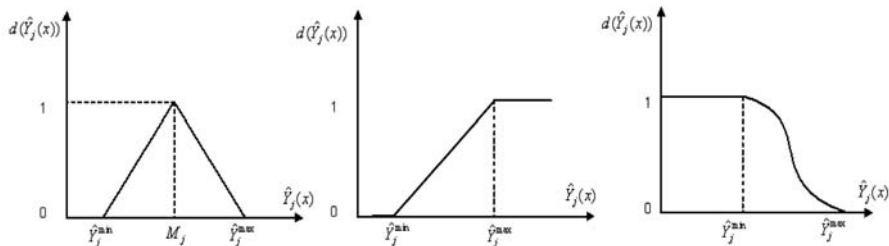
- 1 Descripción de ideas y actividades que se realizarán en esta lección.
  - Se describen los objetivos de la lección 9.5
  - Primero se mostrarán una serie de ideas para motivar el proceso de optimización.
  - Se describe las características de la Función de Deseabilidad.
  - Se presenta la idea de un proceso industrial y sus aplicaciones.
  - Se ilustra la modelación de un procesos químico con la finalidad de resaltar el concepto de la discrepancia, propuesto en la lección 1.2.
  - Con la finalidad de construir el proceso de optimización se presenta un caso de estudio. En la literatura estadística este ejemplo de manufactura se ha utilizado ampliamente.
  - Este se describe y se muestra la solución del caso de estudio, se emplea el paquete estadístico minitab como un auxiliar para este ejemplo.
- 2 El procedimiento del caso de estudio se puede repetir en actividades que realizamos en nuestros trabajos, estudios o investigaciones en medicina, biología, sicología entre otras áreas.

# Objetivo

- Plantear un modelo de optimización cuando existen varias respuestas.
- Describir la función de deseabilidad y su aplicación en optimización.
- Caracterizar varios procesos y su modelación matemática para construir la estrategia de optimización.
- Mostrar el papel que desempeña la discrepancia en los estudios reales.
- Aplicar el método de la función de deseabilidad para optimizar un proceso real.
- Indicar líneas de investigación en este tema.

## Situaciones de optimización

- Sean las variables  $Y_1, Y_2, \dots, Y_r$  que explican un proceso.
- Una de las metas es encontrar las condiciones óptimas de operación.
- La figura de abajo describe las tres situaciones de optimización.



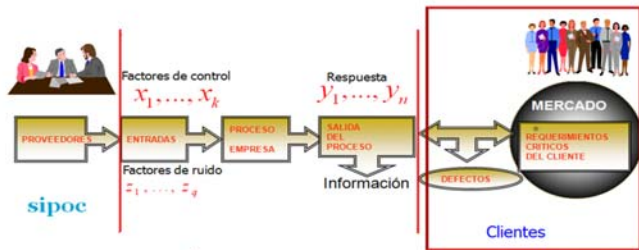
# Planteamiento de optimización

Optimizar  $Y_1$   
 Sujeto a  $Y_2 = M_1$   
 ·  
 $Y_r = M_{r-1}$   
 $X \in R$   $R$  : región de operación.

Los  $M_j$  ( $j = 1, \dots, r - 1$ ) representan consideraciones importantes, objetivos o restricciones para las respuestas.

Optimizar  $[Y_1, Y_2, \dots, Y_r]$ ,  
 Sujeto a  $g_l(x), l = 1, 2, \dots, m.$

## Las variables en procesos



- La relación entre variables:  $Y = f(X|(Z_1, Z_2))$
- Un modelo:  $Y_j = \beta_{j0} + X^t \beta_j + X^t B_j X + Z^t \alpha_j + \epsilon$ ,  $j = 1, \dots, r$

## Las tres situaciones optimización 1

- El objetivo es lo mejor

$$d_j(\hat{Y}_j(x)) = \begin{cases} 0 & \text{si } \hat{Y}_j(x) \leq Y_j^{\min} \text{ o } \hat{Y}_j(x) \geq Y_j^{\max} \\ 1 - \left( \frac{M_j - \hat{Y}_j(x_i)}{M_j - Y_j^{\min}} \right)^r & \text{si } Y_j^{\min} < \hat{Y}_j(x) \leq M_j \\ 1 - \left( \frac{\hat{Y}_j(x_i) - M_j}{Y_j^{\max} - M_j} \right)^r & \text{si } M_j \leq \hat{Y}_j(x) < Y_j^{\max}. \end{cases} \quad (1)$$

- Lo más pequeño es mejor
- Lo más grande es mejor

$$\left( Y_j^{\min} = \min_{x \in R} [\hat{Y}_j(x)], Y_j^{\max} = \max_{x \in R} [\hat{Y}_j(x)] \right).$$



## Las tres situaciones optimización 2

- El objetivo es lo mejor
- Lo más pequeño es mejor

$$d_j(\hat{Y}_j(x)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \hat{Y}_j(x) < Y_j^{\min}, \\ 1 - \left( \frac{\hat{Y}_j(x) - Y_j^{\min}}{Y_j^{\max} - Y_j^{\min}} \right)^r & \text{si } Y_j^{\min} \leq \hat{Y}_j(x) \leq Y_j^{\max}, \\ 0 & \text{si } \hat{Y}_j(x) > Y_j^{\max}. \end{cases} \quad (2)$$

- Lo más grande es mejor

$$d_j(\hat{Y}_j(x)) = \begin{cases} 0 & \text{si } \hat{Y}_j(x) < Y_j^{\min}, \\ 1 - \left( \frac{Y_j^{\max} - \hat{Y}_j(x)}{Y_j^{\max} - Y_j^{\min}} \right)^r & \text{si } Y_j^{\min} \leq \hat{Y}_j(x) \leq Y_j^{\max}, \\ 1 & \text{si } \hat{Y}_j(x) > Y_j^{\max}. \end{cases} \quad (3)$$

# Función de deseabilidad

La deseabilidad global se obtiene mediante la media geométrica:

$$D = (d_1 d_2 \dots d_r)^{1/r}. \quad (4)$$

El objetivo es encontrar el valor de la variable  $x_o$  que maximice el valor de  $D$ .

La media geométrica ponderada como expresión general

$$D = (d_1^{w_1} d_2^{w_2} \dots d_r^{w_r})^{1/r}, \quad (5)$$

donde los  $w_j$  representa los pesos relativos a las  $r$  respuestas.

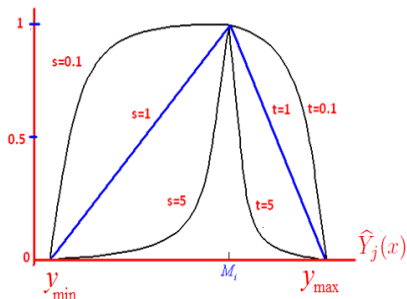
# Función de deseabilidad

El planteamiento de los tres casos se hizo anteriormente.

Maximizar  $D$

Sujeto  $X \in R$

donde  $D = (d_1^{w_1} d_2^{w_2} \dots d_r^{w_r})^{\frac{1}{r}}$

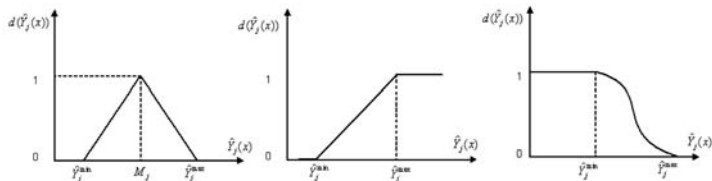


## optimización multi-respuesta

La formulación del problema optimización multi-respuesta se plantea como:

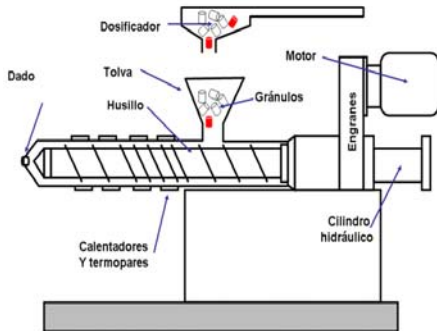
$$\begin{aligned} & \text{Maximizar } \lambda, \\ & \text{Sujeto a } d(\hat{Y}_j(x)) \geq \lambda, j = 1, 2, \dots, r, \\ & X \in R \quad R : \text{región de operación } X \end{aligned} \quad (6)$$

La finalidad principal de esta formulación es encontrar un punto  $x_o$  que maximice el mínimo grado de satisfacción  $\lambda$  con respecto a todas las respuestas dentro de la región experimental.



# Motivación de Procesos

*Un proceso: evaluar la textura*



Diseño genérico de un extrusor

### *Cálculo de la media y varianza*

- Valores de la textura en un proceso de ingeniería industrial en el proceso de materiales:
- Las respuestas ordenadas son 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13
- ¿Cuál es la suma total?

### Indique la notación que se emplea

- ¿Cuál es la media?
- ¿Cuál es la varianza?

# Modelo 1

$$Y = \mu + \varepsilon$$

- $Y$  es una variable aleatoria,
- $\varepsilon$  es una v.a. con distribución normal
- $Media(Y) = \mu$  y  $Varianza(Y) = \sigma^2$
- $E(Y) = \mu$  y  $Var(Y) = \sigma^2$

## Evaluación de la discrepancia

Población

$$Y - \mu = \varepsilon$$

¿ $\varepsilon$  es normal?

Muestra

$$Y - \bar{Y} = d \text{ (Residual)}$$

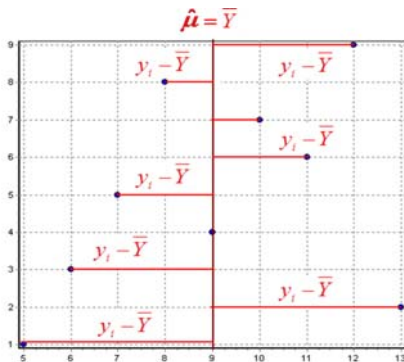
## Estimación del Modelo 1

$$\sum_i^n \varepsilon_i \varepsilon_i = \sum_i^n (x_i - \mu)^2$$

$$\frac{d \sum_i^n \varepsilon_i \varepsilon_i}{d\mu} = 0$$

$$-2 \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\mu}) = 0$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \hat{\mu}$$

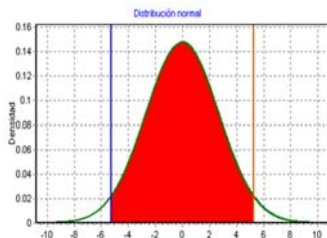


$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{Y})^2}{n-1}$$



## Evaluación del modelo considerando la muestra

$\epsilon$  v.a. con distribución normal  $(0, \frac{\sigma^2}{n})$



$$P(-5.25 \leq X \leq 5.25) = 0.948$$

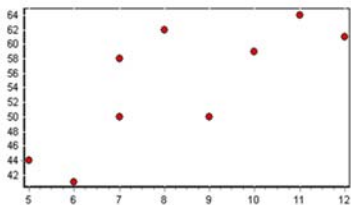
$$P(x_i \leq X \leq x_d) = 0.948$$

# Proceso Químico

## Relación entre dos variables

Estudio de la temperatura y razón de producción en un ejemplo químico, adaptando una ecuación especial.

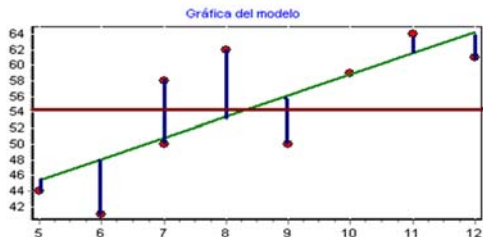
5	44
6	41
7	58
7	50
8	62
9	50
10	59
11	64
12	61



## Modelo 2

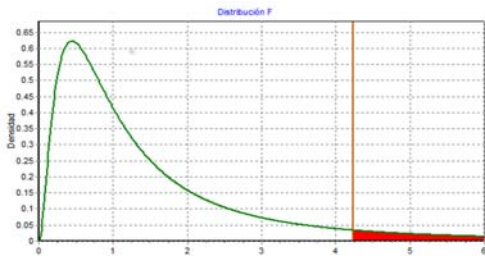
$$Y = \mu(X) + \varepsilon = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$$

$$\hat{y} = 31.795 + 2.705x$$



$$S_{\text{discrepancia modelo}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{Y})^2}{p}$$

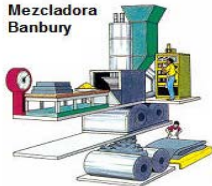
$$S_{\text{discrepancia}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-p}$$



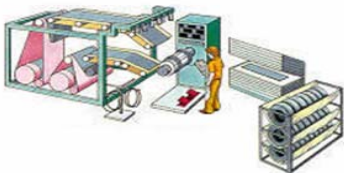
$$\frac{S^2_{\text{discrepancia modelo}}}{S^2_{\text{discrepancia}}} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{Y})^2}{p}}{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-p}} = RV$$

# Proceso manufactura de llantas

Mezcladora  
Banbury



Extruder



# Manufactura de llantas.

Se efectúa un experimento para encontrar la combinación óptima simultánea de tres ingredientes de un compuesto de las bandas de llanta, estos son: nivel sílice ( $X_1$ ), nivel de acoplamiento de selenio ( $X_2$ ), nivel azufre ( $X_3$ )

	<i>nivel 1</i>	<i>nivel 2</i>
$X_1$	0.7	1.7
$X_2$	40	60
$X_3$	1.8	2.8

Las variables respuesta son:

$y_1$	índice de abrasión
$y_2$	módulo 200
$y_3$	enlangación a la ruptura
$y_4$	dureza

Objetivo

$Y_1 > 120$
$Y_2 \geq 1000$
$400 \leq Y_3 \leq 600$
$60 \leq Y_3 \leq 75$

Condición

Maximizar
Maximizar
Valor objetivo 500
Valor objetivo 67.5

# Descripción

$$Y_i = \mu_i(x_1, x_2, x_3) + \epsilon_i$$

$y_1$  índice de abrasión

$y_2$  módulo 200

$y_3$  elongación a la ruptura

$y_4$  dureza

$\epsilon_i$  v.a. con distribución normal  $(0, \sigma_i^2)$

El modelo ajustado  $\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \sum_{i=1}^3 \hat{\beta}_i x_i + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \hat{\beta}_{ij} x_i x_j$

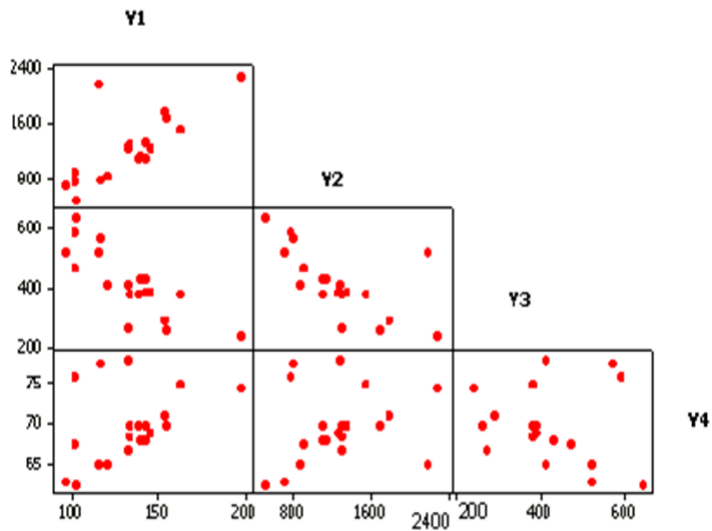
$$\hat{y}_i = \hat{\mu}_i(x_1, x_2, x_3) = \hat{\beta}_0 + x^t \hat{\beta} + x^t \hat{\beta} x$$

## Resultados del experimento

Trat	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$
1	-1	-1	1	102	900	470	67.5
2	1	-1	-1	120	860	410	65.0
3	-1	1	-1	117	800	570	77.5
4	1	1	1	198	2294	240	74.5
5	-1	-1	-1	103	490	640	62.5
6	1	-1	1	132	1289	270	67.0
7	-1	1	1	132	1270	410	78.0
8	1	1	-1	139	1090	380	70.0
9	-1.63	0	0	102	770	590	76.0
10	1.63	0	0	154	1690	260	70.0
11	0	-1.63	0	96	700	520	63.0
12	0	1.63	0	163	1540	380	75.0
13	0	0	-1.63	116	2184	520	65.0
14	0	0	1.63	153	1784	290	71.0
15	0	0	0	133	1300	380	70.0
16	0	0	0	133	1300	380	68.5
17	0	0	0	140	1145	430	68.0
18	0	0	0	142	1090	430	68.0
19	0	0	0	145	1260	390	69.0
20	0	0	0	142	1344	390	70.0



# Análisis de las gráfico de las respuestas



# Estimación de los modelos 1 y 2

$$\hat{y}_1 = \hat{\mu}_1(x_1, x_2, x_3)$$

$$\hat{y}_1 =$$

$$139.1 + 16.5x_1 + 17.9x_2 + 10.9x_3 - 4.0x_{11} - 3.5x_{22} + 5.1x_{12} + 7.1x_{13} + 7.8x_{23}$$

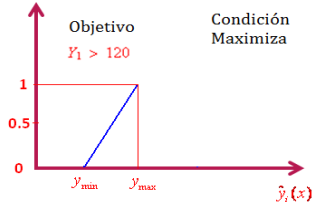
$$S^2_{\text{discrepancia}} = CM_{\text{error}} = 31.5$$

$$\hat{y}_2 = \hat{\mu}_2(x_1, x_2, x_3)$$

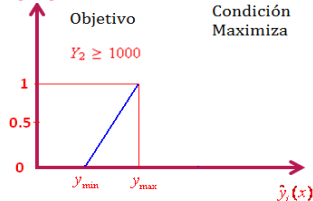
$$\hat{y}_2 = 1261.1 + 268.2x_1 + 246.5x_2 + 199.2x_{33}$$

$$S^2_{\text{discrepancia}} = CM_{\text{error}} = 108039$$

$$d_j(\hat{Y}_j(x))$$



$$d_j(\hat{Y}_j(x))$$



# Estimación de los modelos 3 y 4

$$\hat{y}_3 = \hat{\mu}_3(x_1, x_2, x_3)$$

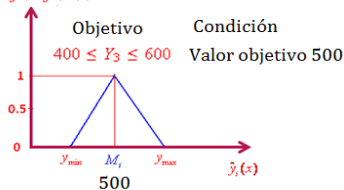
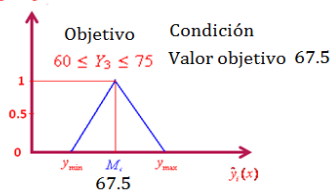
$$\hat{y}_3 = 400.38 - 99.8x_1 - 31.4x_2 - 73.9x_3 + 17.3x_{11}$$

$$S_{discrepancia}^2 = CM_{error} = 422.3$$

$$\hat{y}_4 = \hat{\mu}_4(x_1, x_2, x_3)$$

$$\hat{y}_4 = 68.9 - 1.4x_1 + 4.3x_2 + 1.6x_3 + 1.56x_{11}$$

$$S_{discrepancia}^2 = CM_{error} = 1.61$$

 $d_j(\hat{Y}_j(x))$ 

 $d_j(\hat{Y}_j(x))$ 


# Esquema de optimización

Maximizar  $\hat{Y}_1$   
Maximizar  $\hat{Y}_2$   
 $\hat{Y}_3$  éste entre  $400 \leq \hat{Y}_3 \leq 600$   
 $\hat{Y}_4$  éste entre  $60 \leq \hat{Y}_4 \leq 75$   
Sujeto a  $x^t x \leq r^2 r$  : región experimental.

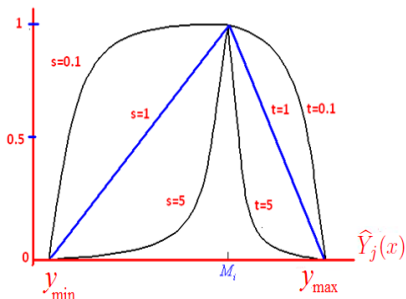
# Función de deseabilidad

El planteamiento de los tres casos se hizo anteriormente.

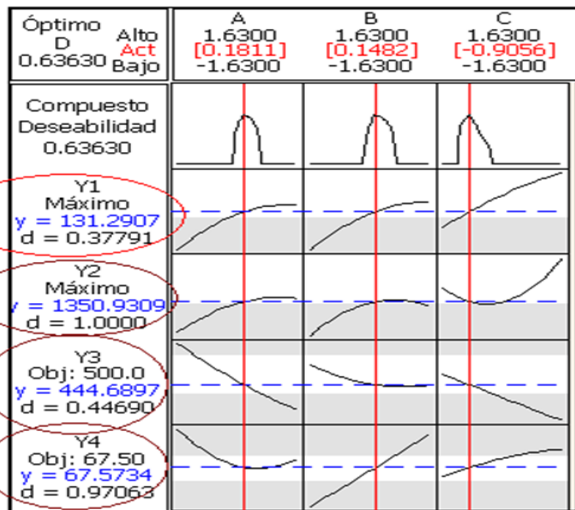
Maximizar  $D$

Sujeto  $X \in R$

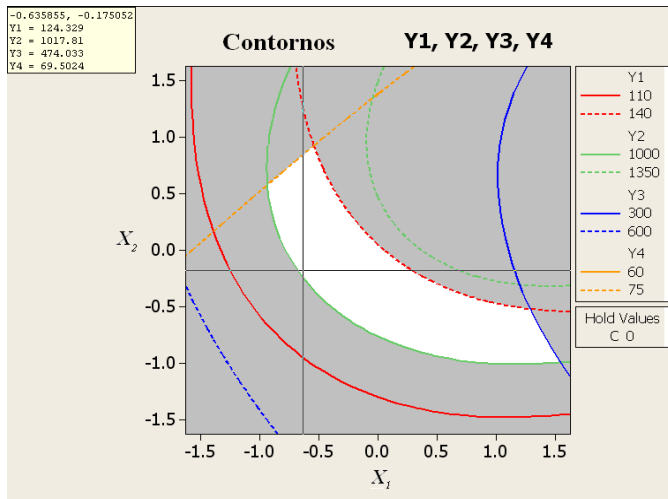
donde  $D = (d_1^{w_1} d_2^{w_2} \dots d_r^{w_r})^{\frac{1}{r}}$



# Descripción gráfica de la optimización



# Descripción gráfica de la optimización



# Propuesta de optimización

Maximizar  $\frac{1}{2}x^t(\widehat{B}_1 + \widehat{B}_2)x + x^t(\widehat{\beta}_1 + \widehat{\beta}_2) + \widehat{\beta}_{01} + \widehat{\beta}_{02}$

Sujeto a

$$-\frac{1}{2}x^t\widehat{B}_1x - x^t\widehat{\beta}_1 - \widehat{\beta}_{01} + 120 + 1.5S_1 \leq 0$$

$$-\frac{1}{2}x^t\widehat{B}_2x - x^t\widehat{\beta}_2 - \widehat{\beta}_{02} + 1000 + 1.5S_2 \leq 0$$

$$\frac{1}{2}x^t\widehat{B}_3x + x^t\widehat{\beta}_3 + \widehat{\beta}_{03} - 600 + 1.5S_3 \leq 0, \text{ y } -\frac{1}{2}x^t\widehat{B}_3x - x^t\widehat{\beta}_3 - \widehat{\beta}_{03} + 400 + 1.5S_3 \leq 0$$

$$-\frac{1}{2}x^t\widehat{B}_4x - x^t\widehat{\beta}_4 - \widehat{\beta}_{04} - 75 + 1.5S_4 \leq 0, \text{ y } -\frac{1}{2}x^t\widehat{B}_4x - x^t\widehat{\beta}_4 - \widehat{\beta}_{04} + 60 + 1.5S_4 \leq 0.$$

El punto óptimo que se generó con su correspondiente respuesta óptima es:

Óptimo	$x_o = (0.39, 0.98, -1.0)$
Respuestas	$\widehat{Y}_1(x_o) = 138.10$ $\widehat{Y}_2(x_o) = 1421.5$ $\widehat{Y}_3(x_o) = 422.85$ $\widehat{Y}_4(x_o) = 70.50$



# Otras alternativas

Maximizar  $\widehat{Y}_1$   
 Sujeto a  $\widehat{Y}_2$  sea máximo  
 $\widehat{Y}_3$  éste entre  $400 \leq \widehat{Y}_3 \leq 600$   
 $\widehat{Y}_4$  éste entre  $60 \leq \widehat{Y}_4 \leq 75$   
 $x^t x \leq r^2 r$  : región experimental.

Maximizar  $\widehat{Y}_1 + \widehat{Y}_2$   
 Sujeto a  
 $\widehat{Y}_1$  sea  $\widehat{Y}_1 > 120$   
 $\widehat{Y}_2$  sea  $\widehat{Y}_2 > 1000$   
 $\widehat{Y}_3$  éste entre  $400 \leq \widehat{Y}_3 \leq 600$   
 $\widehat{Y}_4$  éste entre  $60 \leq \widehat{Y}_4 \leq 75$   
 $x^t x \leq r^2 r$  región experimental

# Puntos de investigación

## Línea de investigación de la función de deseabilidad

- Función de deseabilidad interactiva
- Determinar las cotas
- Construir la función de deseabilidad
- Optimizar el modelo
- Examinar la solución que se obtuvo
- Ajustar la función de deseabilidad