Capítulo 5

Problemas

Problema 5.1

Las coordenadas $\alpha(t), \beta(t)$ Las velocidades $\dot{\alpha}(t), \dot{\beta}(t)$.

Energía cinética $T = 0.5[B_1\dot{\alpha}^2 + B_2\dot{\beta}^2]$,

donde $B_1 = m_1 l^2/3$, $B_2 = m_2 l^2/3$.

Energía potencial del resorte (sin gravedad) $V = 0.5k(a\alpha - a\beta)^2$.

Las ecuaciones diferenciales

1. $B_1\ddot{\alpha} + ka^2\alpha - ka^2\beta = 0$,
2. $B_2\ddot{\alpha} + ka^2\beta - ka^2\alpha = 0$.

Problema 5.2

Las coordenadas x, α

Energía cinética $T = 0.5[m\dot{x}^2 + B\dot{\alpha}^2]$.

Energía potencial de los resortes

$$V = 0.5[k_1(x - 0.5l\alpha)^2 + k_2(x + 0.5l\alpha)^2].$$

Trabajo virtual de la fuerza F(t)

$$\delta W = F \cdot \delta(x - 0.5l\alpha) = F \cdot \delta x + (-0.5Fl) \cdot \delta\alpha$$

Las fuerzas generalizadas para las coordenadas:

$$Q_x = \mathrm{F_o} sen(\Omega t), \quad Q_\alpha = -0.5\mathrm{F_o} l sen(\Omega t)$$

Las ecuaciones diferenciales

1. $m\ddot{x} + (k_1 + k_2)x - 0.5l(k_1 - k_2)\alpha = \mathrm{F_o} sen(\Omega t)$,
2. $B\ddot{\alpha} + 0.25l^2(k_1 + k_2)\alpha - 0.5l(k_1 - k_2)x = -0.5F_o l sen(\Omega t)$.

Problema 5.3

Las coordenadas:

x_1 - desplazamiento relativo del disco con la masa *m* al respecto de carrito,

$\alpha = x_1/r$ - ángulo de rotación del disco, x_2 – desplazamiento del carrito con la masa M. La velocidad absoluta del disco $\dot{x}_1 + \dot{x}_2$. Momento de inercia del disco $B = mr^2 / 2$

Energía cinética

$$T = 0.5[m(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2 + B\dot{\alpha}^2 + M\dot{x}_2^2] = 0.5[m(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2 + B(\dot{x}_1 / r)^2 + M\dot{x}_2^2].$$

Energía potencial $V = 0.5[kx_2^2 + 2kx_1^2 + kx_1^2]$.

Trabajo virtual de la fuerza F(t) $\delta W = F \cdot \delta x_2 = Q_{x_2} \delta x_2$

Las ecuaciones diferenciales

1. $(m + B / r^2)\ddot{x}_1 + m\ddot{x}_2 + 3kx_1 = 0$,
2. $(M + m)\ddot{x}_2 + m\ddot{x}_1 + kx_2 = F$.

Las ecuaciones se complementan con las segundas derivadas.

Problema 5.4

Las coordenadas: x - desplazamiento de la masa 2*m*, α – ángulo de rotación del péndulo.

La velocidad del centro del péndulo

$$v_C^2 = \dot{x}^2 + (0.5l\dot{\alpha})^2 + 2\dot{x}(0.5l\dot{\alpha})\cos\alpha .$$

Energía cinética $T = 0.5[2m\dot{x}^2 + mv_C^2 + B_C\dot{\alpha}^2]$.

Energía potencial del resorte y energía de gravedad del péndulo

$$V = 0.5kx^2 - 0.5ml\cos\alpha .$$

Trabajo virtual de la fuerza F y el torque T $\delta W = F \cdot \delta x + T \cdot \delta\alpha$.

Las derivadas para pequeños ángulos α (sinα≈α, cosα≈1) sin los términos pequeños:

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}) = 2m\ddot{x} + m\ddot{x} + 0.5ml\ddot{\alpha}\cos\alpha - 0.5ml\dot{\alpha}^2\sin\alpha \cong 3m\ddot{x} + 0.5ml\ddot{\alpha} ,$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 ,$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}}) = (0.25ml^2 + B_C)\ddot{\alpha} + 0.5ml\ddot{x}\cos\alpha - 0.5ml\dot{x}\dot{\alpha}sen\alpha \cong (0.25ml^2 + B_C)\ddot{\alpha} + 0.5ml\ddot{x}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha} = -0.5ml\dot{x}\dot{\alpha}\sin\alpha \cong 0,$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = kx, \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha} = 0.5mgl\sin\alpha \cong 0.5mgl\cdot\alpha.$$

Las ecuaciones diferenciales para pequeños ángulos α

1. $3m\ddot{x} + 0.5ml\ddot{\alpha} + kx = F(t)$,
2. $(0.25ml^2 + B_C)\ddot{\alpha} + 0.5ml\ddot{x} + 0.5mgl\cdot\alpha = T(t)$.

Problema 5.5 Las coordenadas α y x.
Energía cinética y potencial de los resortes

$$T = 0.5[B\dot{\alpha}^2 + m\dot{x}^2], \quad V = 0.5[k(x - r\alpha)^2 + 2kx^2],$$

donde $B = mr^2$.

Las ecuaciones diferenciales

1. $B\ddot{\alpha} + kr^2\alpha - krx = T(t)$,
2. $m\ddot{x} + 3kx - kr\alpha = 0$.

Problema 5.6 Las coordenadas α, β
Energía cinética y potencial

$$T = 0.5[B_1\dot{\alpha}^2 + B_2\dot{\beta}^2], \quad V = 0.5[2k(l\alpha)^2 + k(2l\beta - 2l\alpha)^2 + k(l\beta)^2]$$
.

Las ecuaciones diferenciales

1. $B_1\ddot{\alpha} + 6kr^2\alpha - 4kl^2\beta = 0$,
2. $B_2\ddot{\beta} + 5kl^2\beta - 4kl^2\alpha = 0$.

Problema 5.7 Dos péndulos con los parámetros: m_1, l y m_2, l. Las coordenadas α, β.

La velocidad del centro de la masa del péndulo 2

$$v_{C2}^2 = (l\dot{\alpha})^2 + (0.5l\dot{\beta})^2 + 2(l\dot{\alpha})(0.5l\dot{\beta})\cos(\beta - \alpha).$$

Energía cinética y potencial

$$T = 0.5[B_{1O}\dot{\alpha}^2 + m_2 v_C^2 + B_2\dot{\beta}^2],$$

$$V = -0.5m_1 gl\cos\alpha - m_2 g(l\cos\alpha + 0.5l\cos\beta).$$

Las ecuaciones diferenciales para los ángulos pequeños

1. $[B_{1O} + m_2 l^2]\ddot{\alpha} + 0.5m_2 l^2\ddot{\beta} + (0.5m_1 + m_2)gl\cdot\alpha = 0$,
2. $[0.25m_2 l^2 + B_2]\ddot{\beta}^2 + 0.5m_2 l^2\ddot{\alpha} + 0.5m_2 gl\cdot\beta = 0$.

Problema 5.8

Las coordinadas:
x - desplazamiento del centro del disco, α – ángulo de rotación del disco.
El desplazamiento de la placa con masa m_1: $x_1 = x - r\cdot\alpha$
El desplazamiento de la placa con masa m_2: $x_2 = x + r\cdot\alpha$
Energía cinética y potencial

$$T = 0.5[m_3\dot{x}^2 + B\dot{\alpha}^2 + m_1(\dot{x} - r\dot{\alpha})^2 + m_2(\dot{x} + r\dot{\alpha})^2],$$

$$V = 0.5[k(x - r\alpha)^2 + k(x - z)^2 + k(x + r\alpha)^2].$$

Las ecuaciones diferenciales

1. $(m_1 + m_2 + m_3)\dot{x}^2 + 3kx - (m_1 - m_2)r\ddot{\alpha} = kz = kz_o sen(\Omega t)$,
2. $[B\ddot{\alpha} + (m_1 + m_2)r^2]\ddot{\alpha} + 2kr^2\alpha - (m_1 - m_2)r\ddot{x} = 0$.

Problema 5.9

Las coordenadas:
α – ángulo de rotación de la viga al respecto punto O, x - desplazamiento vertical de la masa 4m.
Momento de inercia de la masa de la viga al respecto O

$$B = \frac{m(2l)^2}{12} + m(0.5l)^2.$$

Energía cinética y potencial

$$T = 0.5[B_O\dot{\alpha}^2 + 4m\dot{x}^2],$$

$V = 0.5[k_1(2l\alpha - x)^2 + k_2(l\alpha + x)^2]$.

Las ecuaciones diferenciales

1. $B_O\ddot{\alpha} + (4k_1 + k_2)l^2\alpha - (2k_1 - k_2)x = 0$,
2. $[4m\ddot{x} + (k_1 + k_2)x - (2k_1 - k_2)l\alpha = 0$.

Problema 5.10

Las coordenadas:

α – ángulo de rotación del disco 1, *β* – ángulo de rotación del disco 2, *x* - desplazamiento de la masa 3.

Momentos de inercia de los discos

$$B_1 = \frac{m_1(R)^2}{2}, \qquad B_2 = \frac{m_1(0.75R)^2}{2}.$$

La relación entre el desplazamiento de la masa m_3 y del disco 2

$$0.75R\beta = x \quad \text{o} \quad \beta = x/0.75R.$$

Energía cinética y potencial

$$T = 0.5[B_1\dot{\alpha}^2 + B_2\dot{\beta}^2 + m_3\dot{x}^2] = 0.5[B_1\dot{\alpha}^2 + m_{eq}\dot{x}^2],$$

donde $m_{eq} = m_3 + B_2/(0.75R)^2$.

$$V = 0.5[k_1\alpha^2 + k_2(\beta - \alpha)^2 + 2k_2x^2] = 0.5[k_1\alpha^2 + k_2(\frac{x}{0.75R} - \alpha)^2 + 2k_3x^2]$$

.

Las ecuaciones diferenciales

1. $B_1\ddot{\alpha} + (k_1 + k_2)\alpha - \frac{k_2}{0.75R}x = 0$,

$$m_{eq}\ddot{x} + (2k_3 + \frac{k_2}{(0.75R)^2}x - \frac{k_2}{0.75R}\alpha = 0.$$

Problema 5.11

Las coordenadas:

α – ángulo de rotación del disco 1, *y* – desplazamiento de la masa 2, *x* - desplazamiento de la masa 3.

Momento de inercia del disco y la relación entre rotación del disco y el desplazamiento de la masa 2

$$B_1 = \frac{m_1(R)^2}{2}, \qquad y = R\alpha .$$

Energía cinética y potencial

$$T = 0.5[B_1\dot{\alpha}^2 + m_2\dot{y}^2 + m_3\dot{x}^2] = 0.5[B_{eq}\dot{\alpha}^2 + m_3\dot{x}^2],$$

donde $B_{eq} = B_1 + m_2R^2$.

$$V = 0.5[k_1\alpha^2 + k_3y^2 + k_3(x-y)^2 + k_2x^2] = \\ = 0.5[k_1\alpha^2 + k_3(R\alpha)^2 + k_3(x-R\alpha)^2 + k_2x^2].$$

Las ecuaciones diferenciales

1. $B_{eq}\ddot{\alpha} + (k_1 + 2k_3R^2)\alpha - k_3Rx = 0$,

$$m_3\ddot{x} + (k_2 + k_3)x - k_3R\alpha = 0.$$

Problema 5.12

Las coordenadas:

α, β, γ, Φ– ángulos de rotación de los discos 1, 2, 3 y 4.

Las coordenadas generalizadas para este ejemplo α, *Φ*.

Otras coordenadas se define desde:

$R\alpha = 1.2R\beta$ entonces $\beta = \alpha/1.2$,

$0.8R\gamma = R\phi$ entonces $\gamma = \phi/0.8$.

Momentos de inercia de los discos

$$B_1 = \frac{m_1R^2}{2}, B_2 = \frac{m_2(1.2R)^2}{2}, \ B_3 = \frac{m_3(0.8R)^2}{2}, \ B_4 = \frac{m_4R^2}{2}.$$

Energía cinética y potencial

$$T = 0.5[B_1\dot{\alpha}^2 + B_2\dot{\beta}^2 + B_3\dot{\gamma}^2 + B_4\dot{\phi}^2] = 0.5[B_{1eq}\dot{\alpha}^2 + B_{4eq}\dot{\phi}^2],$$

donde $B_{1eq} = B_1 + B_2/1.2^2$, $B_{4eq} = B_4 + B_3/0.8^2$.

$$V = 0.5[k\alpha^2 + k(\gamma-\beta)^2 + k\phi^2] = 0.5[k\alpha^2 + k(\phi/0.8 - \alpha/1.2)^2 + k\phi^2].$$

Las ecuaciones diferenciales

1. $B_{1eq}\ddot{\alpha} + k(1+1/1.2^2)\alpha - k/(1.2\cdot 0.8)\cdot\phi = 0$,
2. $B_{4eq}\ddot{\phi} + k(1+1/0.8^2)\phi - k/(0.8\cdot 1.2)\cdot\alpha = 0$.

Problema 5.13
Las coordenadas:
α, β, γ– ángulos de rotación de los discos 1, 2 y 3.
Las coordenadas generalizadas para este ejemplo α, γ.
La relación entre α y β
$R\alpha = 1.5R\beta$ entonces $\beta = \alpha/1.5$.
Energía cinética y potencial

$$T = 0.5[B_1\dot{\alpha}^2 + B_2\dot{\beta}^2 + B_3\dot{\gamma}^2] = 0.5[B_{1eq}\dot{\alpha}^2 + B_3\dot{\gamma}^2],$$

donde $B_{1eq} = B_1 + B_2/1.5^2$.

$$V = 0.5[k_1\alpha^2 + k_2(\gamma-\beta)^2 + k_3\gamma^2] = 0.5[k_1\alpha^2 + k_2(\gamma-\alpha/1.5)^2 + k_3\gamma^2].$$

Las ecuaciones diferenciales

1. $B_{1eq}\ddot{\alpha} + (k_1 + k_2/1.5^2)\alpha - (k_2/1.5)\cdot\gamma = 0$,
2. $B_3\ddot{\gamma} + (k_2 + k_3)\gamma - (k_2/1.5)\cdot\alpha = 0$.

Problema 5.14
Las coordenadas:
α, β, γ, Φ– ángulos de rotación de los discos 1, 2, 3 y 4.
Las coordenadas generalizadas para este ejemplo: α- para el disco 1, *Φ*- para el disco 4.
La relación entre los ángulos
$R\alpha = 1.1R\beta = 0.9R\gamma$ entonces $\beta = \alpha/1.1$, $\gamma = \alpha/0.9$.
Energía cinética y potencial

$$T = 0.5[B_1\dot{\alpha}^2 + B_2\dot{\beta}^2 + B_3\dot{\gamma}^2 + B_3\dot{\gamma}^2] = 0.5[B_{1eq}\dot{\alpha}^2 + B_4\dot{\phi}^2],$$

donde $B_{1eq} = B_1 + B_2/1.1^2 + B_3/0.9^2$.

$$V = 0.5[k_1\alpha^2 + k_2(\phi-\gamma)^2] = 0.5[k_1\alpha^2 + k_2(\phi-\alpha/0.9)^2].$$

Las ecuaciones diferenciales

1. $B_{1eq}\ddot{\alpha} + (k_1 + k_2 / 0.9^2)\alpha - (k_2 / 0.9)\phi = 0$,
2. $B_4\ddot{\phi} + k_2\phi - (k_2 / 0.9)\alpha = 0$.

Problema 5.15

El disco no se desliza. Las coordenadas:
x, α – desplazamiento y ángulo de rotación del disco, *β* – ángulo de rotación de la viga.
La relación entre el desplazamiento del disco y su ángulo de rotación

$$\beta = x / r.$$

Momentos de inercia de los discos

$$B_1 = \frac{m_1 r^2}{2}, \qquad B_2 = \frac{m_1 (2l)^2}{12} = m_1 l^2 / 3.$$

Energía cinética y potencial

$$T = 0.5[m_1\dot{x}^2 + B_1\dot{\alpha}^2 + B_2\dot{\beta}^2] = 0.5[m_{1eq}\dot{x}^2 + B_2\dot{\beta}^2],$$

donde $m_{1eq} = m_1 + B_2 / r^2 = 1.5 m_1$.

$$V = 0.5[k_2(l\beta - x)^2 + k_1(l\beta)^2].$$

Las ecuaciones diferenciales

1. $m_{1eq}\ddot{x} + k_2 x - k_2 l\alpha = 0$,
2. $B_2\ddot{\beta} + (k_1 + k_2) l^2 \beta - k_2 l\alpha = 0$.