Capítulo 6

6.8 Problemas

Problema 6.1

Las coordenadas $\alpha(t), x_1(t), x_2(t)$ Las velocidades $\dot{\alpha}, \dot{x}_1, \dot{x}_2$

Energía cinética $T = 0.5[I\dot{\alpha}^2 + m\dot{x}_1^2 + m\dot{x}_2^2]$.

Energía potencial $V = 0.5[k(l\alpha)^2 + k(\frac{2}{3}l\alpha - x_1)^2 + 2k(x_2 - x_1)^2]$.

Las fuerzas no conservativas $F(t)$, $F_1 = l\dot{\alpha}$, $F_2 = c(\dot{x}_2 - \dot{x})$.

El trabajo virtual de las fuerzas no conservativas:

$$\delta W = F \cdot \delta x_2 - F_1 \cdot \delta(l\alpha) - F_2\delta(x_2 - x_1) = (-F_1 l) \cdot \delta\alpha + F_2 \cdot \delta x_1 + [F - F_2] \cdot \delta x_2$$

Las fuerzas generalizadas no conservativas

$$Q_1 = -F_1 l = -cl^2\dot{\alpha}, \qquad Q_2 = F_2 = c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \qquad Q_3 = F(t) - c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1).$$

Las ecuaciones diferenciales

1. $I\ddot{\alpha} + \frac{7}{3}kl^2\alpha - \frac{2}{3}klx_1 = -cl^2\dot{\alpha}$,
2. $m\ddot{x}_1 + 3kx_1 - 2kx_2 - \frac{2}{3}kl\alpha = c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$,
3. $m\ddot{x}_2 + 2kx_2 - 2kx_1 = F(t) - c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$.
4.

Problema 6.2

Las coordenadas:

x_1- desplazamiento de la masa izquierda hacia abajo,

α – ángulo de rotación contrario del reloj,

β – ángulo de rotación del disco derecho,

x_2 – desplazamiento de la masa derecha hacia arriba.

El sistema tiene tres grados de libertad y entre dos coordenadas existe la relación $x_2 = 0.5r\beta$.

La energía cinética

$$T = 0.5[m\dot{x}_1^2 + I_1\dot{\alpha}^2 + I_2\dot{\beta}^2 + m\dot{x}_2^2] = 0.5[m\dot{x}_1^2 + I_1\dot{\alpha}^2 + (I_2 + 0.25mr^2)\dot{\beta}^2]$$

.

La energía potencial de los resortes

$$V = 0.5[k(x_1 - r\alpha)^2 + 2k(r\alpha - r\beta)^2]$$

El trabajo virtual del torque T $\delta W = T \cdot \delta\alpha = Q_\alpha \cdot \delta\alpha$.

Las ecuaciones del movimiento

1. $m\ddot{x}_1 + kx_1 - kr\alpha = 0$,
2. $I_1\ddot{\alpha} + 3kr^2\alpha - krx_1 - 2kr^2\beta = T(t)$,
3. $(I_2 + 0.25mr^2)\ddot{\beta} + 2kr^2\beta - 2kr^2\alpha = 0$.

Problema 6.3

Las coordenadas: x_1, α, β

La energía cinética $T = 0.5[m\dot{x}_1^2 + I_1\dot{\alpha}^2 + I_2\dot{\beta}^2]$.

La energía potencial

$$V = 0.5[k(x_1 - 0.5l\alpha)^2 + k(x_1 + 0.5l\alpha)^2 + k(x_1 + 0.5l\alpha - 0.25l\beta)^2].$$

El trabajo virtual de la fuerza F

$$\delta W = -F \cdot \delta z = [-F_o \sin(\Omega t)] \cdot (\frac{l}{2}\delta\beta) = [-0.5l \cdot F_o \sin(\Omega t)] \cdot \delta\beta.$$

Entonces $Q_{x1} = 0,\ \mathrm{Q}_\alpha = 0,\ \mathrm{Q}_\beta = -0.5l \cdot F_o \sin(\Omega t)$.

Las ecuaciones de movimiento

1. $m \cdot \ddot{x}_1 + k \cdot (x_1 - 0.5l\alpha) + k \cdot (x_1 + 0.5l\alpha) + k \cdot (x_1 + 0.5l\alpha - 0.25l\beta) = 0$,
2. $I_1 \cdot \ddot{\alpha} - 0.5k \cdot l \cdot (x_1 - 0.5l\alpha) + 0.5k \cdot l \cdot (x_1 + 0.5l\alpha) + 0.5k \cdot l \cdot (x_1 + 0.5l\alpha - 0.25l\beta) = 0$
,
3. $I_2 \cdot \ddot{\beta} - 0.25k \cdot l \cdot (x_1 + 0.5l\alpha - 0.25l\beta) = -0.5F_o l \sin(\Omega t)$.

Problema 6.4

Las coordenadas: x_1, α, x_2

La energía cinética $T = 0.5[m\dot{x}_1^2 + I\dot{\alpha}^2 + m\dot{x}_2^2]$.

La energía potencial $V = 0.5[kx_1^2 + k(x_1 - 0.5r\alpha)^2 + k(r\alpha - x_2)^2]$.

Las ecuaciones de movimiento

1. $m \cdot \ddot{x}_1 + kx_1 + k \cdot (x_1 - 0.5r\alpha) = 0$,
2. $I \cdot \ddot{\alpha} - 0.5kr \cdot (x_1 - 0.5r\alpha) + kr \cdot (r\alpha - x_2) = T_o \sin(\Omega t)$,
3. $m \cdot \ddot{x}_2 - k \cdot (r\alpha - x_2) = 0$.

Problema 6.5

Las coordenadas: x_1, x_2, x_3

La energía cinética $T = 0.5[2m\dot{x}_1^2 + m\dot{x}_2^2 + m\dot{x}_3^2]$

La energía potencial $V = 0.5[kx_1^2 + 2k(x_2 - x_1)^2 + k(x_3 - x_2)^2]$

Las fuerzas no conservativas:

P(t), $F_1 = c\dot{x}_1$, $F_2 = 2c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$, $F_3 = c(\dot{x}_3 - \dot{x}_2)$.

Su trabajo virtual

$$\delta W = P \cdot \delta x_2 - F_1 \cdot \delta x_1 - F_2 \cdot \delta(x_2 - x_1) - F_3 \cdot \delta(x_3 - x_2).$$

Las fuerzas generalizadas; $Q_1 = -F_1 + F_2$, $Q_2 = P - F_2 + F_3$, $Q_3 = -F_3$.

Las ecuaciones de movimiento

1. $2m \cdot \ddot{x}_1 + kx_1 - 2k \cdot (x_2 - x_1) = Q_1 = -F_1 + F_2 = -c\dot{x}_1 + 2c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$,
2. $m \cdot \ddot{x}_2 + 2k \cdot (x_2 - x_1) - k \cdot (x_3 - x_2) = Q_2 = P - F_2 + F_3 = P(t) - 2c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + c(\dot{x}_3 - \dot{x}_2)$
3. $m \cdot \ddot{x}_3 + k \cdot (x_3 - x_2) = Q_3 = -c(\dot{x}_3 - \dot{x}_2)$

Problema 6.6

Ángulos de rotación del rotor, los engranes y de generador *α, β, γ, δ*

La relación entre los ángulos de los engranes $4r\beta = r\delta$, o $\delta = 4\beta$.

La energía cinética

$$T = 0.5[I_T\dot{\alpha}^2 + I_B\dot{\beta}^2 + I_A\dot{\delta}^2 + I_G\dot{\chi}^2] = 0.5[I_T\dot{\alpha}^2 + (I_B + 16I_A)\dot{\beta}^2 + I_G\dot{\chi}^2]$$

.

La energía potencial de torsión de dos flechas

$$V = 0.5[k_1(\beta - \alpha)^2 + k_2(\gamma - \delta)^2] = 0.5[k_1(\beta - \alpha)^2 + k_2(\gamma - 4\beta)^2],$$

donde k_1, k_2 [Nm/rad]– rigidez torsional de las flechas.

Las ecuaciones de movimiento

1. $I_T \cdot \ddot{\alpha} + k_1\alpha - k_1\beta = 0$,
2. $(I_B + 16I_A)\ddot{\beta} + (k_1 + 16k_2)\beta - k_1\alpha - 4k_2\gamma = 0$,
3. $I_G\ddot{\gamma} + k_2\gamma - 4k_2\beta = 0$.

Problema 6.7

Las coordenadas: α – ángulo de rotación de la viga, x_1 – desplazamiento vertical de la masa *m*, x_2 - desplazamiento vertical de la masa 2*m.*

La energía cinética

$$T = 0.5[I\dot{\alpha}^2 + m\dot{x}_1^2 + 2m\dot{x}_2^2].$$

La energía potencial de los resortes

$$V = 0.5[k(\frac{3}{4}l\alpha)^2 + k(x_1 - \frac{l}{2}\alpha)^2 + 2k(x_2 - l\alpha)^2].$$

Las ecuaciones de movimiento

1. $I_T \cdot \ddot{\alpha} + (\frac{9}{16} + \frac{1}{4} + 2)kl^2\alpha - \frac{1}{2}klx_1 - 2klx_2 = 0$,
2. $m \cdot \ddot{x}_1 + kx_1 - 0.5kl\alpha = 0$,
3. $2m \cdot \ddot{x}_2 + 2kx_2 - 2kl\alpha = 0$.

Problema 6.8

Coordenadas: x_1 – desplazamiento vertical del centro de la masa m_1 con respecto a su posición inicial, α – ángulo de rotación de la viga con respecto al centro C, x_2 – desplazamiento vertical de la masa m_2 con respecto de su posición inicial.

La energía cinética $T = 0.5[m\dot{x}_1^2 + I\dot{\alpha}^2 + m_2\dot{x}_2^2]$.

La energía potencial de los resortes

$$V = 0.5[k(x_1 - 0.3l\alpha)^2 + k(x_1 + \frac{l}{2}\alpha)^2 + 2k(x_2 - x_1)^2].$$

El trabajo virtual de la fuerza F $\delta W = F \cdot \delta x_2 = (F_o \cos\Omega t) \cdot \delta x_2$.

Las ecuaciones de movimiento

1. $m_1 \cdot \ddot{x}_1 + 4kx_1 - 0.2kl\alpha - 2kx_2 = 0$,
2. $I \cdot \ddot{\alpha} + 0.34kl^2\alpha + 0.2klx_1 = 0$,
3. $m_2 \cdot \ddot{x}_2 + 2kx_2 - 2kx_1 = F_o \cos\Omega t$.

Problema 6.9

Las coordenadas: α – ángulo de rotación de la viga, x_1 – desplazamiento de la masa m, x_2 – desplazamiento vertical de la masa 2m con respecto de su posición inicial.

La energía cinética $T = 0.5[I\dot{\alpha}^2 + m\dot{x}_1^2 + 2m_2\dot{x}_2^2]$.

La energía potencial de los resortes

$$V = 0.5[k(l\alpha)^2 + k(x_1 - \frac{2}{3}l\alpha)^2 + 2k(x_2 - x_1)^2].$$

Las ecuaciones de movimiento

1. $I \cdot \ddot{\alpha} + (1 + \frac{4}{9})kl^2\alpha - \frac{2}{3}klx_1 = 0$,
2. $m_1 \cdot \ddot{x}_1 + 3kx_1 - \frac{2}{3}kl\alpha - 2kx_2 = F_o \cos\Omega t$,
3. $2m_1 \cdot \ddot{x}_2 + 2kx_2 - 2kx_1 = 0$.

Problema 6.10

Las coordenadas: x_1 – desplazamiento vertical del centro de la masa de 2m, α – ángulo de rotación de la viga, x_2 – desplazamiento vertical de la masa m con respecto su posición inicial.

La energía cinética $T = 0.5[2m\dot{x}^2 + I\dot{\alpha}^2 + m\dot{x}_2^2]$.

La energía potencial de los resortes

$$V = 0.5[k(x_1 + 0.5l\alpha)^2 + 2k(x_1 - 0.5l\alpha)^2 + k(x_2 - x_1)^2].$$

El trabajo virtual de la fuerza F

$$\delta W = F \cdot \delta(x_1 - 0.5l\alpha) = (F_o \cos\Omega t) \cdot \delta x_1 + (-0.5F_o l \sin\Omega t) \cdot \delta\alpha .$$

Las ecuaciones de movimiento

1. $2m \cdot \ddot{x}_1 + 4kx_1 - 0.5kl\alpha - kx_2 = F_o \sin\Omega t$,
2. $I \cdot \ddot{\alpha} + \frac{3}{4}kl^2\alpha - 0.5klx_1 = -0.5F_o \sin\Omega t$,
3. $m \cdot \ddot{x}_2 + kx_1 - kx_1 = 0$.