Filtros Activos, Conceptos Básicos y Diseño

J.I.Huircán

***Abstract*—Se revisan los conceptos básicos de filtros activos, presentando procedimientos básicos de implementación mediante Amplificadores Operacionales y distintas formas de diseño basado en los filtros clásicos Butterworth y Chebyshev.**

***Index Terms*—Filtros Activos**

I. Introduction

Los filtros juegan un importante rol en la electrónica actual, tanto en áreas de comunicaciones y procesamiento de imágenes como control automático. Estos se pueden clasificar en filtros análogos, digitales y de capacitor conmutado (híbrido, el cual contiene elementos análogos y digitales).

Un filtro es un dispositivo de dos puertas capaz de transmitir una banda de frecuencias limitada. Estos pueden ser pasivos o activos. Los primeros, están construidos en base a resistencias, bobinas y condensadores, mientras los activos están conformados por resistencias, condensadores y Amplificadores Operacionales, los que además tienen las siguientes características:

- Pequeño tamaño y peso.
- Uso en el rango de las frecuencias de audio (20KHz)
- Valores de resistencias y condensadores razonables a frecuencias muy bajas.
- Tiene elevadas características de aislamiento.
- Puede proveer ganancia si se requiere.

A continuación se dará un marco teórico para los filtros activos, sus especificaciones y diseño.

II. Tipos de Filtros y Especificaciones de Respuesta en Frecuencia

Los filtros se pueden representar mediante la función de transferencia $H(s)$, la cual se expresa en términos de su ganancia o atenuación, así se tiene

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} \tag{1}$$

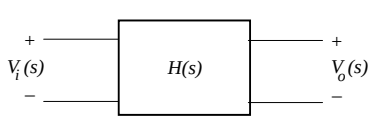

Fig. 1. Red de dos puertas, filtro activo.

Donde $V_i(s)$ es la entrada de filtro y $V_o(s)$, la salida.

La transmisión del filtro se encuentra evaluando $H(s)|_{s=j\omega}$, así en términos de magnitud y fase se tiene

$$H(j\omega) = |H(j\omega)|\, e^{j\phi(\omega)} \tag{2}$$

Documento preparado en el Departamento de Ingeniería Eléctrica, Universidad de La Frontera para la asignatura Circuitos Electrónicos II. Versión Preliminar 2.1.

El espectro de la señal de salida será obtenido por

$$|V_o(j\omega)| = |H(j\omega)|\,|V_i(j\omega)| \tag{3}$$

De acuerdo al criterio de selección de frecuencia de paso o de rechazo, existen cuatro tipos de filtros.

A. Pasa Bajos (BandPass Filter)

Son aquellos que tienen ganancia a frecuencias menores que la frecuencia de corte ω_c. Así, la banda de paso está dada para $0 < \omega < \omega_c$, donde ω_c se expresa en [rad/seg] o Hertz y corresponde a la frecuencia en la cual la ganancia es dividida por $\sqrt{2}$ (cae en $-3dB$). La ganancia disminuye a medida que se supera a dicha frecuencia, de acuerdo a la Fig. 2, esta zona se conoce como banda de rechazo.

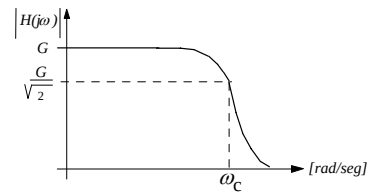

Fig. 2. Respuesta en frecuencia de un filtro pasabajos.

La función de transferencia para un filtro pasabajos de orden n de ganancia G es

$$H(s) = \frac{Gb_o}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + .. + b_o} \tag{4}$$

B. Pasa Altos (HighPass Filter)

Permite el paso de frecuencias superiores a ω_c. Su función de transferencia se puede obtener a partir de (4) reemplazando $s = 1/s$, es decir

$$H(s) = \frac{Gb_o}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + .. + b_o}\Big|_{s=\frac{1}{s}} \tag{5}$$

Luego se tiene

$$H(s) = \frac{Gs^n}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + .. + a_o} \tag{6}$$

Donde $b_n = 1$, $a_{n-i}{=}\frac{b_i}{b_o}$, $i = 1, 2, ..., n$. La respuesta en frecuencia se indica en la Fig. 3.

C. Pasa Banda (BandPass Filter)

Este filtro deja pasar las frecuencias que se encuentran dentro una de banda B (expresado en rad/seg o en Hertz), centrado en ω_o, atenuando todas las otras frecuencias. La Fig. 4 muestra la respuesta en frecuencia del filtro centrado en ω_o cuyo ancho de banda está definido por

$$B = \omega_2 - \omega_1 \tag{7}$$

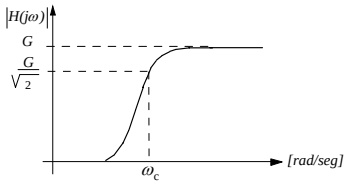

Fig. 3. Respuesta en frecuencia de un filtro pasaaltos.

La función de transferencia se obtiene de (4) como

$$H(s) = \frac{Gb_o}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + .. + b_o}\Big|_{s=\left(\frac{s^2+\omega_o^2}{Bs}\right)} \tag{8}$$

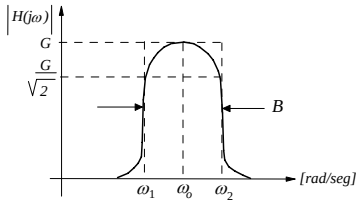

Fig. 4. Respuesta en frecuencia de un filtro pasabandas.

Así, el orden del filtro pasabanda se incrementará al doble. Se define el factor de calidad Q, (9) el cual mide la selectividad del filtro (un Q muy alto indica que el filtro es muy selectivo con banda de paso muy pequeña) como

$$Q = \frac{\omega_o}{B} = \frac{f_o}{B} \tag{9}$$

La ganancia será la amplitud de la función de transferencia a la frecuencia $\omega_o = \sqrt{\omega_2 \cdot \omega_1}$. Note que ω_o corresponde a la media geométrica, pues está en escala logarítmica.

D. Rechaza Banda (BandReject Filter)

También llamado elimina banda y para algunas situaciones filtro Notch, deja pasar todas las frecuencias excepto una única banda, la cual está definida por B, como se indica en la Fig. 5.

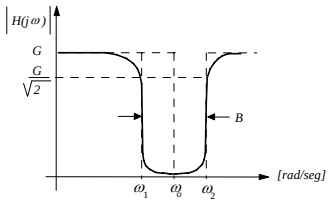

Fig. 5. Respuesta en frecuencia de un filtro rcehaza banda.

La función de transferencia se obtiene haciendo la sustitución indicada en (10) donde las características de banda son iguales al filtro pasabanda.

$$H(s) = \frac{Gb_o}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + .. + b_o}\Big|_{s=\left(\frac{Bs}{s^2+\omega_o^2}\right)} \tag{10}$$

III. Especificaciones de un Filtro

A. Respuesta en Frecuencia

La respuesta en frecuencia de un filtro se representa en escala lineal o logaritmica. Esta se expresa en función de su ganancia o atenuación (dB en escala logaritmica) versus la frecuencia cuya escala está en décadas u octavas (escala logaritmica).

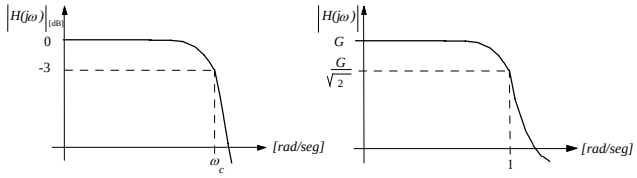

Fig. 6. (a) Respuesta Normalizada en ganancia Logaritmica. (b) Representación Lineal.

Si la ganancia se normaliza respecto de la ganancia máxima, se tiene una curva de ganancia 1 ó 0 $[dB]$. La frecuencia de corte ω_c, se establece para muchos análisis igual 1 $[rad/seg]$, también como referencia para diseño.

B. Polos y Respuesta En La Región De Transición

En la práctica, la respuesta ideal del filtro no existe, pues aparece una zona llamada *región de transición* (banda de transición). Para lograr una aproximación que represente un filtro ideal, debe incrementarse el número de polos, sin embargo, esta cantidad no puede ser infinita dado que no puede implementarse prácticamente. Cada polo de $H(s)$ introduce una pendiente de 20 dB/Década o 6 dB/Octava, luego, si la $H(s)$ tiene dos polos tendrá una pendiente de 40dB/Década en la región de transición, lo que determina el orden del filtro (Fig. 7).

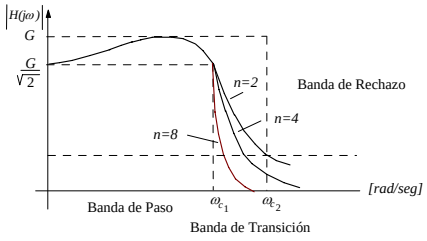

Fig. 7. Polos en la región de transición.

C. Especificación básica de un filtro

En los filtros análogos, las especificaciones están dadas por rangos de valores. Se tienen cinco parámetros basados en las características de atenuación (Sansen y Laker 1994) los cuales son mostrados en la Fig. 8:

- Máxima atenuación en la banda de paso (A_{PB})
- Ripple de la banda de paso o Ancho de ripple (RW)
- Mínima atenuación de la banda de rechazo (A_{SB})
- Frecuencia de esquina de la banda de paso (ω_{PB})
- Frecuencia de esquina de la banda de rechazo (ω_{SB})

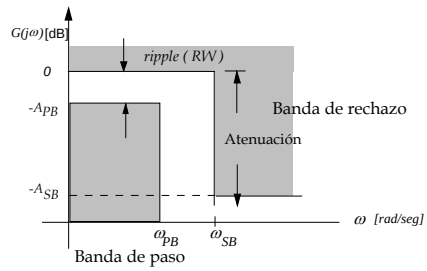

Fig. 8. Ventana de diseño para un filtro pasabajos.

Las respuestas pueden presentar una variación $G(\omega) \pm \delta G(\omega)$, dado que los componentes siempre varían, lo que obliga a hablar de una ventana de especificación o ventana de diseño. Cuando el diseño cae fuera de esta ventana, éste es descartado. Existe una gran cantidad de herramientas computacionales que permiten trasladar las especificaciones de la Fig. 8 a una función de transferencia H. Para distintas especificaciones existen numerosas funciones que satisfacen las respuestas de ganancia o fase, luego se debe considerar los objetivos de prestación y costo para reducir este número de funciones a una.

Un método para obtener H es usar funciones prototipos (también llamadas funciones de aproximación), tales como, Chebyshev (equal-ripple), Butterworth (máximanente plana) y elípticos. Estas funciones permiten determinar $H(s)$ mediante una aproximación en el dominio de la frecuencia, para esto $|H(j\omega)|$ se aproxima a la característica de un filtro pasabajos ideal de acuerdo a un criterio de error predeterminado.

D. Funciones de Aproximación

Las funciones de aproximación en el dominio de la frecuencia pueden ser expresadas como

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2 S_n^2(\omega)}} \tag{11}$$

Donde $S_n(\omega)$ representa un clásico polinomio de orden n, ya sea Butterworth o Chebyshev.

E. Escalamiento

Es fundamental para el diseño de filtros, debido a que permite plantear los desarrollos en torno una frecuencia de referencia, y luego trasladar el filtro y los componentes para otros diseños. Esto se consigue haciendo $s = \alpha p$, donde p es la variable compleja de la función original y s es la variable de la nueva función. Sea $H_o(p)$ la función de transferencia original, entonces la nueva función de transferencia será

$$H(s) = H_o(p)\,|_{p=\frac{s}{\alpha}} = H_o\left(\frac{s}{\alpha}\right) \tag{12}$$

Sea la red RC de la Fig. 9, donde su función de transferencia está dada por (13).

$$H(s) = \frac{1}{1+sRC} \tag{13}$$

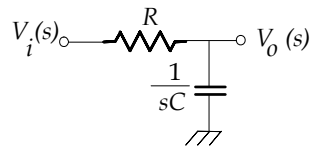

Fig. 9. Filtro RC.

Si $R = 1\,[\Omega]$ y $C = 1\,[F]$, se tiene que $\omega_C = 1\,[r/s]$, escalando para una nueva frecuencia $\omega_C = 10\,[r/s]$,se tiene que $s = \omega_C p$

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{1+pRC}|_{p=\frac{s}{\omega_C}} = \frac{1}{1+\frac{s}{\omega_C}RC} \\ &= \frac{1}{1+s\frac{RC}{\omega_C}} = \frac{1}{1+s\frac{R}{\omega_C}C} = \frac{1}{1+sR\frac{C}{\omega_C}} \end{aligned}$$

Lo que implica dividir R o C por 10, lo cual asegura un desplazamiento de la frecuencia.

IV. Funciones Prototipos

A. Butterworth

Este filtro tiene una respuesta plana en la banda de paso (llamada *máximamente plana*), a expensas de la respuesta en la región transición, la cual es de 20 dB/Década por polo. El módulo de la respuesta en frecuencia del filtro pasabajos, para ganancia G, y frecuencia de corte ω_c esta dado en (14).

$$|H(j\omega)| = \frac{G}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}} \tag{14}$$

Donde $n = 1, 2, ..., k.$ es el orden. La Fig. 10 indica respuestas de este filtro para distintos n.

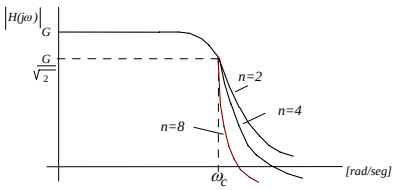

Fig. 10. Respuesta del Filtro Butterworth.

A.1 Propiedades del Filtro

Una respuesta máximamente plana tiene muchas derivadas que son cero en el origen, $\omega = 0$. Para ganancia unitaria y una frecuencia $\omega = \omega_c$, se tiene que

$$|H(j\omega)| \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{15}$$

También llamada $-3[dB]$. Para $\omega >> \omega_c$, se tiene que

$$|H(j\omega)| \approx \frac{1}{\omega^n} \tag{16}$$

o

$$|H(j\omega)|_{dB} \approx 20\log\left(\frac{1}{\omega^n}\right) = -20n\log(\omega) \qquad (17)$$

Así, la variación será de $-20n\,[dB]$ por década, donde n es el orden del filtro.

A.2 Determinación de las funciones de transferencia

Sea (14) con $G = 1$ y $\omega_c = 1$, haciendo $s = j\omega$, entonces $\omega = s/j$, reemplazando se tiene

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{s}{j}\right)^{2n}} = \frac{1}{1+(-1)^n s^{2n}} \qquad (18)$$

Los polos de la función de transferencia se obtienen para

$$(-1)^n s^{2n} = -1 \qquad (19)$$

Pero como $e^{j(2k-1)\pi} = -1$, entonces

$$(-1)^n s^{2n} = e^{j(2k-1)\pi} \qquad (20)$$

Así, los polos para $k = 1, 2, ..., n$, estarán dados por

$$s_k = e^{\frac{j(2k+n-1)\pi}{2n}} \qquad (21)$$

Los polinomios que se obtienen, son de la forma

$$H(s) = \frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)...(s-s_n)} \qquad (22)$$

Para $n = 2$ se tiene que $s_1 = e^{\frac{j3\pi}{4}}$ y $s_2 = e^{\frac{j5\pi}{4}}$, luego

$$H(s) = \frac{1}{\left(s-e^{\frac{j3\pi}{4}}\right)\left(s-e^{\frac{j5\pi}{4}}\right)} = \frac{1}{s^2+\sqrt{2}s+1} \qquad (23)$$

El denominador de (23) corresponde a un polinomio de *Butterworth* indicado en la Tabla I.

TABLE I
POLINOMIOS DE BUTTERWORTH EN FORMA FACTORIZADA.

n	Polinomios de Butterworth
1	$s+1$
2	$s^2+\sqrt{2}s+1$
3	$\left(s^2+s+1\right)(s+1)$
4	$\left(s^2+0.7653s+1\right)\left(s^2+1.8477s+1\right)$
5	$\left(s^2+0.6180s+1\right)\left(s^2+1.6180s+1\right)(s+1)$
6	$\left(s^2+0.5176s+1\right)\left(s^2+\sqrt{2}s+1\right)\left(s^2+1.9318s+1\right)$

De la misma forma son determinados los polinomios para orden superior. Al determinar el módulo de $H(s)$ basada en estos polinomios, se obtiene (14).

B. Chebyshev

Este filtro tiene una ondulación (ripple) en la banda de paso. Mientras mayor es el orden, mayor es la pendiente en la región de transición, pero mayor es el ripple y el número de ondulaciones en la banda de paso. El módulo de la función de transferencia está dado por (24), donde K_1 y ϵ, son valores constantes y $C_n(x)$ es el polinomio *Chebyshev* (en primera aproximación) de grado n. La Fig. 11 muestra la respuesta en frecuencia para diferentes n y la tabla II, los polinomios correspondientes.

$$|H(j\omega)| = \frac{K_1}{\sqrt{1+\epsilon^2 C_n^2(\frac{\omega}{\omega_c})}} \qquad (24)$$

$C_n(\omega)$ está dados por

$$C_n(\omega) = \cos\left(n\cos^{-1}(\omega)\right) \qquad 0 \le \omega \le 1 \qquad (25)$$

$$C_n(\omega) = \cosh\left(n\cosh^{-1}(\omega)\right) \qquad \omega > 1 \qquad (26)$$

De (25) se determina una ecuación de recurrencia para encontrar los polinomios.

$$C_{n+1}(\omega) - 2\omega C_n(\omega) + C_{n-1}(\omega) = 0 \qquad (27)$$

Con $C_1(\omega) = \omega$ y $C_2(\omega) = 2\omega^2 - 1$.

TABLE II
POLINOMIOS DE CHEBYSHEV.

n	Polinomios de Chebyshev
1	ω
2	$2\omega^2-1$
4	$8\omega^4-8\omega^2+1$
6	$32\omega^6-48\omega^4+18\omega^2-1$

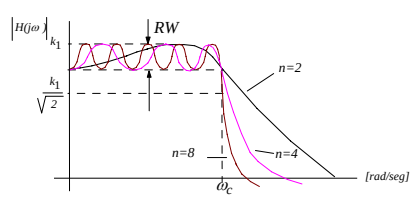

Fig. 11. Respuesta del filtro Chebyshev Pasabajos.

RW será la distancia $1 - \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2}}$, tomando la diferencia respecto de $0\,[dB]$, queda

$$RW|_{dB} = 20\log\sqrt{1+\epsilon^2} \qquad (28)$$

Así, el RW queda determinado por la elección de ϵ, el cual fluctúa entre 0 y 1. Si ϵ=1, entonces $RW = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$, es decir, $3\,[dB]$. En la Fig. 11, cuando $\omega = \omega_c$ la ganancia no cae en $-3\,[dB]$ respecto del máximo, esto ocurrirá sólo cuando $RW = 3\,[dB]$.

B.1 Propiedades del filtro

Sea $K_1 = 1$, para $\omega = \omega_c$

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2 C_n^2(1)}} = \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2}} \tag{29}$$

Como $C_n^2(1) = 1$ de acuerdo a la tabla II, la magnitud es igual al ancho del ripple. Para $\omega >> \omega_c$ ó $\epsilon^2 C_n^2(\omega) >> 1$, se tiene

$$|H(j\omega)| \backsimeq \frac{1}{\epsilon C_n(\omega)} \tag{30}$$

o

$$|H(j\omega)|_{dB} = -20\log\epsilon - 20\log C_n(\omega) \tag{31}$$

Para $\omega >> \omega_c$, $C_n(\omega)$ se puede aproximar a $2^{n-1}\omega^n$, así

$$\begin{aligned} |H(j\omega)|_{dB} &= -20\log\epsilon - 20\log\left(2^{n-1}\omega^n\right) \\ &= -20\log\epsilon - 6\,(n-1) - 20\log\omega \end{aligned} \tag{32}$$

De acuerdo a (32), la atenuación para un mismo orden en la región de transición es mayor que $-20\,[dB/Dec]$, esto debido al término $-20\log\epsilon - 6\,(n-1)$. Como ϵ es menor que 1, el valor obtenido resulta ser negativo luego para compensarlo, se puede escoger un valor de n más grande.

B.2 Determinación de funciones de transferencia

Como $s = j\omega$, entonces $\omega = s/j$,

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2 C_n^2(\frac{s}{j})}} \tag{33}$$

Luego los polos de $H\,(s)$ se obtienen haciendo

$$\epsilon^2 C_n^2(\frac{s}{j}) = -1 \text{ ó } C_n(\frac{s}{j}) = \pm\frac{j}{\epsilon} \tag{34}$$

Usando la forma trigonométrica dada en (25)

$$\cos(n\arccos(\frac{s_k}{j})) = \pm\frac{j}{\epsilon} \tag{35}$$

Donde s_k son las raices buscadas. Sea $p_k = \arccos(\frac{s_k}{j}) = u_k + jv_k$, entonces, $\cos(np_k) = \cos(nu_k + jnv_k)$, así

$$\begin{aligned} \cos(np_k) &= \cos(nu_k)\cos(jnv_k) - \sin(nu_k)\sin(jnv_k) \\ &= \cos(nu_k)\cosh(nv_k) - j\sin(nu_k)\sinh(nv_k) \end{aligned}$$

Luego

$$\cos(nu_k)\cosh(nv_k) = 0 \tag{36}$$

$$\sin(nu_k)\sinh(nv_k) = \pm\frac{1}{\epsilon} \tag{37}$$

Como $\cosh(nv_k) \neq 0$, entonces, $\cos(nu_k) = 0$, para todo $u_k = \pm\frac{\pi}{2n}, \pm\frac{3\pi}{2n}, ..., \frac{\pi}{2n}(2k-1)$, por otro lado, $\sin(nu_k) = \pm 1$, así, $v_k = \frac{1}{n}\arcsin h(\frac{1}{\epsilon})$.

Los polinomios dependen de los valores de ϵ, así, para un filtro de $n = 2$ y $RW = 1\,[dB]$, $\epsilon = 0.50884$.

$$\begin{aligned} &v_k = \tfrac{1}{2}\sinh^{-1}\left(\tfrac{1}{0.50884}\right) = 0.714 \\ &u_k = \pm\tfrac{\pi}{4}, \pm\tfrac{3\pi}{4} \\ &\cos\left(2\cos^{-1}\left(\tfrac{s_1}{j}\right)\right) = \cos\left(2\left(\tfrac{\pi}{4} + j0.714\right)\right) \\ &\cos\left(2\cos^{-1}\left(\tfrac{s_2}{j}\right)\right) = \cos\left(2\left(\tfrac{3\pi}{4} + j0.714\right)\right) \end{aligned}$$

De lo que se desprende que

$$\begin{aligned} \cos^{-1}\left(\frac{s_1}{j}\right) &= \frac{\pi}{4} + j0.714 \\ \cos^{-1}\left(\frac{s_2}{j}\right) &= \frac{3\pi}{4} + j0.714 \\ s_1 &= j\cos\left(\frac{\pi}{4} + j0.714\right) \\ s_2 &= j\cos\left(\frac{3\pi}{4} + j0.714\right) \end{aligned}$$

Luego los polos de $H\,(s)$ son $s_1 = 0.549 + j0.895$ y $s_2 = 0.549 - j0.895$, reemplazando en (22), queda

$$\begin{aligned} H\,(s) &= \frac{1}{(s+0.549+j0.895)\,(s+0.549-j0.895)} \\ &= \frac{1}{s^2+1.098s+1.1024} = \frac{\frac{1}{1.1024}}{0.907s^2+0.995s+1} \end{aligned}$$

De esta forma es posible obtener la Tabla III.

TABLE III
POLINOMIOS DE CHEBYSHEV.

n	Polinomios de Chebyshev (1 dB)
2	$0.907s^2 + 0.995s + 1$
4	$(1.0137s^2 + 0.2829s + 1)\left(3.5792s^2 + 2.4114s + 1\right)$
6	$\left(1.0094s^2 + 0.1256s + 1\right)\left(1.7731s^2 + 0.6093s + 1\right)$ $\left(8.0192s^2 + 3.7209s + 1\right)$

V. IMPLEMENTACIÓN DE FILTROS

La implementación de los filtros requiere de un circuito activo que permite la construcción en forma práctica de una función de transferencia. A partir de (4), (5), (6) y (7), se obtienen las funciones de 2° orden pasabajos (38), pasaaltos (39), pasabandas (40) y rechazabandas (41).

$$H(s) = \frac{G\omega_c^2}{s^2 + \frac{\omega_c}{Q}s + \omega_c^2} \tag{38}$$

$$H(s) = \frac{Gs^2}{s^2 + \frac{\omega_c}{Q}s + \omega_c^2} \tag{39}$$

$$H(s) = \frac{G\frac{\omega_o}{Q}s}{s^2 + \frac{\omega_o}{Q}s + \omega_o^2} \tag{40}$$

$$H(s) = \frac{G\left(s^2 + \omega_o^2\right)}{s^2 + \frac{\omega_o}{Q}s + \omega_o^2} \tag{41}$$

Donde G representa la ganancia del filtro, Q, factor de calidad y ω_c la frecuencia de corte inferior o superior y ω_o representa la frecuencia central.

A. Implementación con Amplificadores Operacionales

Las funciones de transferencia de 2° orden se implementan con Amplificadores Operacionales, Resistores y Capacitores, como lo indica Hilburn y Johnson (1975), Sedra y Smith (1998). Existen dos circuitos clásicos, el VCVS o *Sallen-Key* (SK) y el de *Múltiple Realimentación* (MFB), también llamada *Rauch* (Dede y Espi, 1983).

A.1 Circuitos Pasabajos

La Fig. 12 muestra los circuitos SK y MFB, donde (42) y (43) representan las funciones de transferencia.

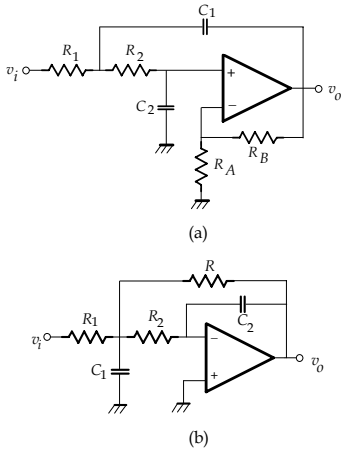

Fig. 12. (a) Pasabajos SK. (b) Pasabajos MFB.

Para el filtro SK se tiene

$$H(s) = \frac{\left(\frac{R_B}{R_A} + 1\right)\frac{1}{R_1R_2C_1C_2}}{s^2 + \left\{\frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) - \frac{1}{R_2C_2}\frac{R_B}{R_A}\right\}s + \frac{1}{R_1R_2C_1C_2}} \tag{42}$$

Donde $G = \frac{R_B}{R_A} + 1$, $\omega_c^2 = \frac{1}{R_1R_2C_1C_2}$. Luego, para el filtro MFB, la función de transferencia será

$$H(s) = \frac{\left(-\frac{R}{R_1}\right)\frac{1}{RR_2C_1C_2}}{s^2 + \left\{\frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\right\}s + \frac{1}{RR_2C_1C_2}} \tag{43}$$

Donde $G = \frac{R}{R_1}$ y $\omega_c^2 = \frac{1}{RR_2C_1C_2}$. Note que la célula MFB tiene un desfase de 180°.

A.2 Circuitos Pasaaltos

Las estructuras SK y MFB se muestran en la Fig. 13, donde las funciones serán (44) y (45) respetivamente.

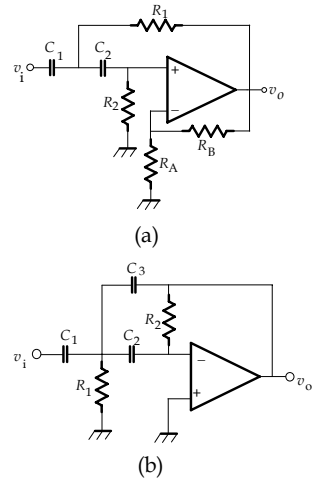

Fig. 13. (a) Pasa alto SK. (b) Pasa alto MFB.

$$H(s) = \frac{\left(\frac{R_B}{R_A} + 1\right)s^2}{s^2 + \left\{\frac{1}{R_1}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) - \frac{1}{R_2C_2}\frac{R_B}{R_A}\right\}s + \frac{1}{R_1R_2C_1C_2}} \tag{44}$$

Donde $G = \frac{R_B}{R_A} + 1$, $\omega_c^2 = \frac{1}{R_1R_2C_1C_2}$.

$$H(s) = \frac{-\frac{C_1}{C_3}s^2}{s^2 + \frac{C_1+C_2+C_3}{C_2C_3R_2}s + \frac{1}{R_1R_2C_2C_3}} \tag{45}$$

Donde $G = \frac{C_1}{C_3}$, $\omega_c^2 = \frac{1}{R_1R_2C_2C_3}$.

A.3 Circuitos Pasabandas

Las versiones SK y MFB se muestran en la Fig. 14 y la función de transferencia SK está dada por (46) y la MFB por (47).

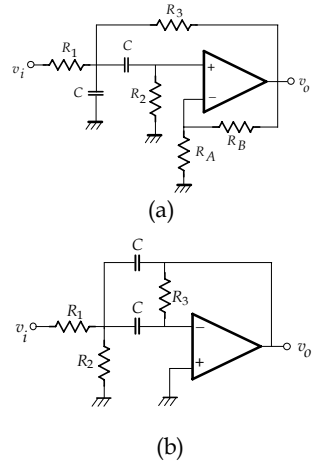

Fig. 14. (a) Pasabanda SK. (b) Pasabanda MFB.

$$H(s) = \frac{\left(\frac{R_B}{R_A}+1\right)\frac{1}{R_1C}\left\{\frac{1}{C}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{2}{R_2}-\frac{1}{R_3}\frac{R_B}{R_A}\right)\right\}s}{s^2+\left\{\frac{1}{C}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{2}{R_2}-\frac{1}{R_3}\frac{R_B}{R_A}\right)\right\}s+\frac{1}{R_2C^2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}\right)} \tag{46}$$

Donde $G = \left(\frac{R_B}{R_A}+1\right)$, $B = \frac{1}{C}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{2}{R_2}-\frac{1}{R_3}\frac{R_B}{R_A}\right)$ y $\omega_o^2 = \frac{1}{R_2C^2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}\right)$. Para el filtro MFB se tiene

$$H(s) = \frac{\left(-\frac{R_3}{2R_1}\right)\frac{2}{R_3C}s}{s^2+\frac{2}{R_3C}s+\frac{1}{R_3C^2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)} \tag{47}$$

Donde $G = \left(\frac{R_3}{2R_1}\right)$, $B = \frac{2}{R_3C}$ y $\omega_o^2 = \frac{1}{R_3C^2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$.

A.4 Circuitos Rechaza Banda

La Fig. 15 corresponde a un VCVS rechaza banda con ganancia unitaria, donde $R_3 = R_1||R_2$.

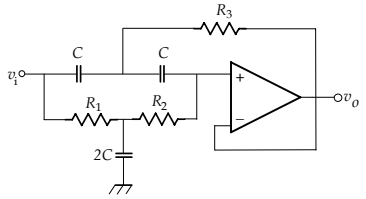

Fig. 15. Filtro Rechaza Banda.

Luego su función de transferencia será

$$H(s) = \frac{\left(s^2+\frac{1}{R_1R_2C^2}\right)}{s^2+\frac{2}{R_2C}s+\frac{1}{R_1R_2C^2}} \tag{48}$$

Donde, $G = 1$ y $\omega_o^2 = \frac{1}{R_1R_2C^2}$. La Fig.16 es una modificación para $G \neq 1$, de alto Q.

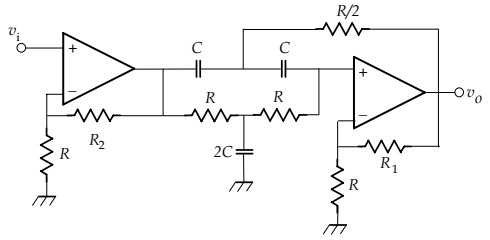

Fig. 16. Filtro Rechaza Banda de Alto Q.

$$H(s) = \frac{\left(\frac{R_2}{R}+1\right)\left(\frac{R_1}{R}+1\right)\left(s^2+\frac{1}{R^2C^2}\right)}{s^2+\frac{2}{RC}\left(1-\frac{R_1}{R}\right)s+\frac{1}{R^2C^2}} \tag{49}$$

Para esta situación $G = \left(\frac{R_2}{R}+1\right)\left(\frac{R_1}{R}+1\right)$ y $\omega_o^2 = \frac{1}{R^2C^2}$

VI. Diseño Simple de Filtros Activos

Si los requerimientos no son tan exigentes es posible implementar los filtros de 2° orden usando células SK y MFB. para lo cual se prescinde de las tablas.

A. Pasabajo y Pasaalto

El filtro *equal component*, pasabajo o pasaalto, usado por Jung (1974) sugiere tomar la celda SK para $R_1 = R_2 = R$ y $C_1 = C_2 = C$, así la función dada en (42) queda

$$H(s) = \frac{\left(\frac{R_B}{R_A}+1\right)\frac{1}{R^2C^2}}{s^2+\left(\frac{2}{RC}-\frac{1}{RC}\frac{R_B}{R_A}\right)s+\frac{1}{R^2C^2}} \tag{50}$$

Luego se desprende que

$$\omega_c = \frac{1}{RC} \tag{51}$$

$$G = \left(\frac{R_B}{R_A}+1\right) \tag{52}$$

Finalmente, para ω_c, G, C, R_B dados se determina R y R_A. Esta situación es válida para el fitro *pasaalto* SK, considerando la igualación de componentes.

B. Filtros Pasabanda

Usando el filtro pasabanda MFB de la Fig.14*b*, considerando un Q bajo que satisfaga los requerimientos de ganancia, ancho de banda y frecuencia central, determinando de (47) las expresiones $\omega_o = \frac{1}{C}\sqrt{\frac{1}{R_3}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)}$, $G = \frac{R_3}{2R_1}$ y $\frac{\omega_o}{Q} = \frac{2}{R_3C}$, se tiene que

$$R_1 = \frac{R_3}{2G} = \frac{Q}{\omega_o GC} \tag{53}$$

$$R_3 = \frac{2Q}{\omega_o C} \tag{54}$$

Finalmente

$$R_2 = \frac{Q}{\omega_o C(2Q^2-G)} \tag{55}$$

Considerando que se debe cumplir

$$Q > \left(\frac{G}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{56}$$

Dados G, C, Q y ω_o el diseño queda concluido.

C. Filtro Rechaza Banda

Para el diseño de filtros rechazabanda puede utilizarse la configuración *Notch*, con la red doble-T.de frecuencia central $\omega_o = \frac{1}{RC}$ y ganancia unitaria.

VII. Método Propuesto por Steven W. Smith

Smith (1997), propone una tabla con los coeficientes de *Butterworth* y *Chebyshev* junto con circuitos SK *equal component*, de ganancia distinta de uno. Se diseñan los módulos de segundo orden por separado y se conectan en cascada para obtener filtros de orden superior.

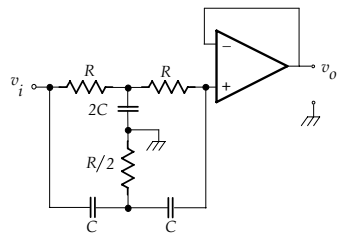

Fig. 17. Filtro Rechaza Banda.

A. Obteniendo las ecuaciones de diseño

Sea la función $H(s)$ pasabajos *equal component* dada en (42), modificada de acuerdo a (57)

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{\left(\frac{R_B}{R_A}+1\right)}{R^2C^2s^2 + RC\left(2-\frac{R_B}{R_A}\right)s+1} \tag{57}$$

La tabla para el diseño de filtros se obtiene haciendo

$$b_2 = R^2C^2 \tag{58}$$

$$b_1 = RC\left(2-\frac{R_B}{R_A}\right) \tag{59}$$

$$b_o = 1 \tag{60}$$

Sea el polinomio de $n=2$, $\left(s^2+\sqrt{2}s+1\right)$, igualando los coeficientes

$$1 = R^2C^2 \tag{61}$$

$$\sqrt{2} = RC\left(2-\frac{R_B}{R_A}\right) \tag{62}$$

Como

$$\omega_c = \frac{1}{RC} \tag{63}$$

Se obtiene

$$\frac{R_B}{R_A} = 0.586 \tag{64}$$

$$R = \frac{1}{2\pi f_c C} = \frac{0.1592}{f_c C} \tag{65}$$

Para el polinomio de $n=4$, en su forma factorizada, $\left(s^2+0.7653s+1\right)\left(s^2+1.8477s+1\right)$, cada factor representará una etapa, así, para la etapa 1 se tiene

$$1.8477 = RC\left(2-\frac{R_B}{R_A}\right) \tag{66}$$

$$\frac{R_B}{R_A} = 0.1523 \tag{67}$$

Para la etapa 2

$$0.7653 = RC\left(2-\frac{R_B}{R_A}\right) \tag{68}$$

$$\frac{R_B}{R_A} = 1.2347 \tag{69}$$

Se mantiene la misma relación entre R y C dada en (65). Los cálculos se repiten para orden 6 y 8. Finalmente, las ecuaciones para el diseño, dados R_A, C y f_c son

$$R_B = k_2 R_A \tag{70}$$

$$R = \frac{k_1}{f_c C} \tag{71}$$

TABLE IV
Coeficientes para Filtros de Butterworth y Chebyshev (6% ripple).

	Butterworth		Chebyshev (6%)	
# polos	k_1	k_2	k_1	k_2
2 etapa 1	0.159	0.586	0.1293	0.842
4 etapa 1	0.159	0.152	0.2666	0.582
etapa 2	0.159	1.235	0.1544	1.660
6 etapa 1	0.159	0.068	0.4019	0.537
etapa 2	0.159	0.586	0.2072	1.448
etapa 3	0.159	1.483	0.1574	1.846
8 etapa 1	0.159	0.038	0.5359	0.522
etapa 2	0.159	0.337	0.2657	1.379
etapa 3	0.159	0.889	0.1848	1.711
etapa 4	0.159	1.610	0.1582	1.913

B. Procedimiento de Diseño

Dados R_A, C y f_c, se tiene:

- Se determina el orden del filtro n
- Se escogen de la tabla IV los coeficientes k_1 y k_2
- Con cada k_i se calculan los R_B y R usando (70) y (71)

VIII. Método propuesto por Savant y Roden

Savant (1992) usa circuitos SK de 2° orden (pasa bajos y pasa altos) con ganancia unitaria, frecuencia de corte 1 $[r/s]$ y $R_1 = R_2 = R = 1\,[\Omega]$, para el filtro pasabajos ($C = C_1 = C_2 = 1\,[F]$, para el filtro pasaalto). Además, una tabla con coeficientes C_i/C o R_i/R, asociados a las respuestas *Butterworth* y *Chebyshev*.

A. Determinación del orden del filtro

Sea la ventana de diseño de la Fig. 8, se propone el uso de ω_{PB}, ω_{SB}, A_{PB} y A_{SB}, para filtros *Butterworth*

$$n_B = \frac{\log(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2})}{\log(\frac{f_{PB}}{f_{SB}})} \tag{72}$$

donde $\epsilon_1 = \sqrt{10^{0.1A_{PB}}-1}$ y $\epsilon_2 = \sqrt{10^{0.1A_{SB}}-1}$. Donde n_B es el orden del filtro a diseñar.

Para filtros de *Chebyshev* se tiene

$$n_C = \frac{\log(2\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2})}{\sqrt{2(\frac{f_{PB}}{f_{SB}}-1)}} \tag{73}$$

Donde n_C, es el orden del filtro.

B. Determinación de tablas

B.1 Coeficientes de para filtros Butterworth

Sea la función de transferencia SK de (42) con $R = 1\,[\Omega]$

$$H(s) = \frac{\frac{1}{1^2 C_1 C_2}}{s^2 + \frac{2}{1C_1}s + \frac{1}{1^2 C_1 C_2}} = \frac{1}{C_1 C_2 s^2 + 2C_2 s + 1} \quad (74)$$

Para $n = 2$, $\left(s^2 + \sqrt{2}s + 1\right)$, igualando coeficientes

$$b_2 = 1 = C_1 C_2 \quad (75)$$

$$b_1 = \sqrt{2} = 2C_2 \quad (76)$$

De esta forma,

$$C_2 = \frac{b_1}{2} \quad (77)$$

$$C_1 = \frac{b_2}{C_2} \quad (78)$$

Así $C_1 = 1.4142$ y $C_2 = 0.7071$.

Para $n = 4$, se tiene $\left(s^2 + 0.7653s + 1\right)\left(s^2 + 1.8477s + 1\right)$, se calcularán dos pares de coeficientes, para el primer y segundo polinomio. Así se tiene que $C_2 = \frac{0.7653}{2} = 2.613$ y $C_1 = \frac{1}{C_2} = 0.382$, luego $C_2 = \frac{1.8477}{2} = 1.082$ y $C_1 = \frac{1}{C_2} = 0.924$. Considerando el polinomio de orden 6 y 8 se puede construir la tabla V.

TABLE V
COEFICIENTES PARA FILTROS DE BUTTERWORTH.

	Butterworth	
# polos	$C_1 = C$ o $R_1 = R$	$C_2 = C$ o $R_2 = R$
2 etapa 1	1.414	0.7071
4 etapa 1	1.082	0.9241
etapa 2	2.613	0.3825
6 etapa 1	1.035	0.9660
etapa 2	1.414	0.7071
etapa 3	3.863	0.288
8 etapa 1	1.020	0.9809
etapa 2	1.202	0.8313
etapa 3	1.800	0.5557
etapa 4	5.125	0.1950

Si la función es pasaalto, los coeficientes serán idénticos, esto tomando $C = C_1 = C_2 = 1[F]$. Para esta situación, los coeficientes son R_i/R.

TABLE VI
COEFICIENTES PARA FILTROS DE CHEBYSHEV 1 DB.

	Chebyshev (1dB)	
# polos	$C_1 = C$ o $R_1 = R$	$C_2 = C$ o $R_2 = R$
2 etapa 1	2.218	0.6061
4 etapa 1	3.125	1.269
etapa 2	7.546	0.1489
6 etapa 1	4.410	1.904
etapa 2	6.024	0.3117
etapa 3	16.46	0.06425

C. Ecuaciones de Diseño

Dado el orden n, se obtienen los coeficientes C_1/C y C_2/C respectivos. Como la Tabla V esta construida para frecuencia 1 $[r/s]$ y $R = 1\,[\Omega]$, entonces para $\omega_c \neq 1\,[r/s]$ y $R \neq 1\,[\Omega]$, se debe escalar la frecuencia. Así se hace $s = \omega_c p$, se reemplaza en (42) y se igualan coeficientes, luego

$$b_2 = R^2 \omega_c^2 C_1 C_2 \quad (79)$$

$$b_1 = 2R\omega_c C_2 \quad (80)$$

entonces

$$C_2 = \frac{b_1}{2}\frac{1}{R\omega_c} \quad (81)$$

$$C_1 = \frac{b_2}{C_2}\frac{1}{R^2\omega_c^2} = \frac{2b_2}{b_1}\frac{1}{R\omega_c} \quad (82)$$

Para el polinomio de *Butterworth* de $n = 2$, se tiene $C_1 = 1.414\frac{1}{R\omega_c}$ y $C_2 = 0.707\frac{1}{R\omega_c}$. Lo mismo ocurrirá para $n = 4$, se mantienen los coeficientes de la Tabla V, pero aparece un factor en función de R y ω_c. Finalmente, los capacitores para $f_c \neq 0$ y $R \neq 1\,[\Omega]$ estarán dados por

$$C_n = C_i \frac{1}{R\omega_c} = C_i \frac{1}{2\pi f_c R} \quad (83)$$

D. Procedimiento de Diseño

Para una frecuencia de corte dada f_c y un $R \neq 1\,[\Omega]$:

- Se determina el orden del filtro n
- Se escogen de la tabla los coeficientes C_i/C o R_i/R
- Con cada coeficiente se calcula C_n o R_n usando (83)

IX. Diseño propuesto por Dede y Espi

El método propuesto por Dede y Espi (1983) usa una tabla de datos asociada a la respuesta del filtro y un circuito básico. Usando los polinomios de *Butterworth* de orden par (2 a 6) en su forma factorizada, considerando el polinomio de la forma $b_2 s^2 + b_1 s + b_o$, se elabora la Tabla VII. Cada par de coeficientes representa una etapa de 2° orden. Los coeficientes del filtro *Chebyshev* de la tabla III con *ripple* de 1 dB, se usan para la construcción de la Tabla VIII.

TABLE VII
COEFICIENTES DE BUTTERWORTH.

n	Celula	1	Celula	2	Celula	3
	b_1	b_2	b_1	b_2	b_1	b_2
2	1.4142	1				
4	0.7654	1	1.8478	1		
6	0.5176	1	1.4142	1	1.9319	1

TABLE VIII
COEFICIENTES DE CHEBYSHEV 1 DB.

n	Celula	1	Celula	2	Celula	3
	b_1	b_2	b_1	b_2	b_1	b_2
2	0.9957	0.9070				
4	0.2829	1.0137	2.4114	3.5792		
6	0.1256	1.0094	0.6093	1.7731	3.7209	8.0192

A. Diseño de Filtros Pasabajos

Se usará un circuito SK de $G = 1$ en la banda de paso o el MFB (Rauch), para ganancias mayores que la unidad.

A.1 Usando Circuitos SK

Sea la célula SK de la Fig. 12a, haciendo $R_1 = R_2 = R$ y $R_A = \infty$ y $R_B = 0$ en (42), se obtiene

$$H(s) = \frac{1}{R^2C_1C_2s^2 + 2RC_2s + 1} \tag{84}$$

A.1.a Obtención de la ecuaciones de diseño. Para determinar las ecuaciones se debe reescalar para $s = \omega_c p$

$$H(s) = \frac{1}{R^2C_1C_2(\omega_c p)^2 + 2RC_2(\omega_c p) + 1} \tag{85}$$

Ajustando de acuerdo al polinomio $b_2s^2 + b_1s + b_o$

$$b_2 = R^2C_1C_2\omega_c^2 \tag{86}$$

$$b_1 = 2RC_2\omega_c \tag{87}$$

Para R dado se determinan los valores para C_1 y C_2.

$$C_1 = \frac{b_2}{\pi b_1 R f_c} \tag{88}$$

$$C_2 = \frac{b_1}{4\pi R f_c} \tag{89}$$

A.1.b Procedimiento de diseño. Para una frecuencia f_c (Hertz) dada, para un filtro de ganancia unitaria:

- Determinar el tipo de filtro (Butterworth o Chebyshev)
- Determinar el orden del filtro (n).
- Obtener b_1 y b_2 de las Tablas VII y VIII.
- Elegir R y evaluar las ecuaciones (88) y (89)

Si C_1 y C_2 son pequeñas, se hace R, diez veces más pequeño. El criterio de elección para R considera la Tabla IX para frecuencias próximas a f_c.

TABLE IX
VALORES DE R Y C PARA RANGOS DE FRECUENCIA.

f_c	R	C
$100\,[Hz]$	$100\,[K\Omega]$	$100\,[nF]$
$1\,[KHz]$	$10\,[K\Omega]$	$10\,[nF]$
$10\,[KHz]$	$1\,[K\Omega]$	$1\,[nF]$

A.2 Usando Circuitos Rauch

Sea la célula Rauch de la Fig. 12b, la función de transferencia dada en (43).

$$H(s) = \frac{-\frac{R}{R_1}}{RR_2C_1C_2s^2 + RR_2C_1C_2\left\{\frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\right\}s + 1} \tag{90}$$

A.2.a Obtención de las ecuaciones de diseño. Reescalando (90), haciendo $s = \omega_c p$

$$H(s) = \frac{-\frac{R}{R_1}}{RR_2C_1C_2\left(\omega_c p\right)^2 + RR_2C_2\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\omega_c p + 1} \tag{91}$$

De aquí se desprende que la ganancia

$$G = \frac{R}{R_1} \tag{92}$$

Ajustando respecto del polinomio de segundo orden, se tiene

$$b_2 = RR_2C_1C_2\left(\omega_c^2\right) \tag{93}$$

$$b_1 = RR_2C_2\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\omega_c \tag{94}$$

$$R = GR_1 \tag{95}$$

Luego, de (93), (94) y (95) se llega

$$C_1 = \frac{b_2}{\omega_c b_1 G R_1}\left\{(1+G) + GR_1\frac{1}{R_2}\right\} \tag{96}$$

$$C_2 = \frac{b_1}{\omega_c G R_1\left\{R_2\left(1+G\right) + GR_1\right\}} \tag{97}$$

Considerando

$$R_2 = \frac{R_1 G}{10\left(1+G\right)} \tag{98}$$

Entonces

$$C_1 = \frac{1.7507 b_2}{f_c b_1 R_1}\frac{(G+1)}{G} \tag{99}$$

$$C_2 = \frac{0.14468 b_1}{f_c R_1 G} \tag{100}$$

Ahora para R_1 y G dados, el diseño está completo.

A.2.b Procedimiento de diseño usando células Rauch. Para ganancia distinta de 1, sea ésta A y n es el orden del filtro, se calcula la ganancia de cada célula G de modo que la ganancia total $G^n = A$. Luego para una frecuencia de corte f_c, se elige R_1 de acuerdo usando la Tabla IX:

- Determinar el tipo de filtro (Butterworth o Chebyshev)
- Determinar el orden del filtro (n).
- Obtener b_1 y b_2 de las Tablas VII y VIII.
- Elegir R_1 y evaluar (95), (98), (99) y (100)

B. Diseño de Filtros Pasa Alto

B.1 Usando Circuitos SK

Sea la función de transferencia con $G = 1$ (44) cuya Fig 13a, haciendo $C_1 = C_2 = C$, se evalua

$$R_1 = \frac{b_1}{4\pi b_2 f_c C} \tag{101}$$

$$R_2 = \frac{1}{\pi b_1 f_c C} \tag{102}$$

C se elige de acuerdo a la tabla IX

B.2 Usando Circuitos Rauch

En forma análoga al filtros pasabajos, sea el circuito de la Fig. 13b, luego

$$C_1 = \frac{C}{G} \tag{103}$$

$$C_2 = \frac{10\,(G+1)\,C}{G} \tag{104}$$

$$R_1 = \frac{G b_1}{22\pi b_2 C f_c} \tag{105}$$

$$R_2 = \frac{G}{5.712 b_1 C f_c} \tag{106}$$

Para G, C y f_c dados el diseño está completo.

C. Diseño de Filtros Pasa Banda y Rechaza Banda

C.1 Pasa Banda

Se usa un circuito *resonador* de banda angosta, con ganancia G en la banda de paso, un $Q > 5$ y f_o dado. Utilizando (9) para el encontrar B.

$$R = \frac{1}{2\pi f_o C} \tag{107}$$

$$R_1 = \frac{1}{\pi f_o C} \tag{108}$$

$$R_2 = \frac{1}{2\pi C B} \tag{109}$$

$$R_3 = \frac{1}{2\pi C B G} \tag{110}$$

Para un C conocido el diseño queda completo.

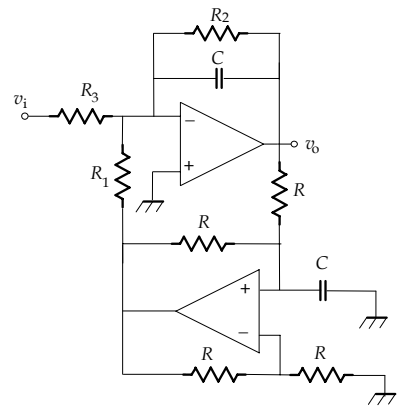

Fig. 18. Filtro pasabanda Resonador.

C.2 Rechaza Banda

Usado el circuito de la Fig. 16, para ω_o y $G \neq 1$ dado, eligiendo R, el diseño queda completo.

$$C = \frac{1}{2\pi R f_o} \tag{111}$$

$$R_1 = R\frac{2Q-1}{2Q} \tag{112}$$

$$R_2 = R\left\{\frac{2Q\,(G-2)+1}{4Q-1}\right\} \tag{113}$$

X. Conclusiones

El diseño de filtros activos básicamente se traduce en especificar adecuadamente la respuesta deseada, posteriormente en elegir la función aproximación que satisface los requerimientos y finalmente elegir el circuito activo que permita en la forma más simple la implementación definitiva. Existen distintos métodos para la implementación del filtro, sin embargo la elección del método dependerá de la precisión del filtro.

References

[1] Savant, C., Roden, M., Carpenter, G. 1992 *Diseño Electrónico Circuitos y sistemas.* Adisson-Wesley
[2] Smith, S.W. 1997. *The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing.*California Technical Publishing
[3] Dede, E., Espi, J. .1983. *Diseño de circuitos y sistemas Electrónicos.* Marcombo
[4] Malik, R.1996. *Circuitos Electrónicos. Análisis, Diseño y Simulación.* Prentice-Hall
[5] Sedra, A. Smith, K.1998. *Microelectronics Circuits.* Oxford Press