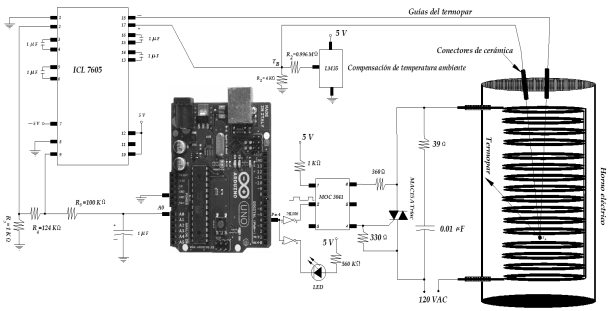
Capítulo 9

Control



Material Web

♣ Ejemplo 9.1

Analizar el siguiente sistema dinámico lineal para una entrada $u(t)$ escalón de amplitud unitaria:

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1}(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.49 & -1.12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.49 \end{bmatrix} u(t) \tag{9.1a}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \tag{9.1b}$$

a) Simular el sistema dinámico (9.1a-9.1b) en **Matlab** usando el método de integración Runge-Kutta 4/5.

b) Obtener el correspondiente sistema discreto:

$$\boldsymbol{x}(t_k) = \Phi \boldsymbol{x}(t_{k-1}) + \Gamma u(t_{k-1}) \tag{9.2a}$$

$$y(t_k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t_k) \\ x_2(t_k) \end{bmatrix} \tag{9.2b}$$

c) Implemente en la tarjeta Arduino el algoritmo (9.2a) y grafique los resultados en **Matlab**.

d) Compare los resultados de simulación por ode45(...) de la ecuación (9.1a) y el sistema discreto 9.2a.

Considere la frecuencia natural de oscilación $w_n = 0.7$ rad/seg, con un factor de amortiguamiento $\rho = 0.8$ y un periodo de muestreo h=1 mseg.

Solución

La simulación del sistema dinámico (9.1a-9.1b) corresponde a lazo abierto, debido a que la entrada $u(t)$ es un escalón y el factor de amortiguamiento $\rho < 1$, entonces el transitorio corresponde a una respuesta subamortiguada; para este caso, la respuesta tendrá componentes oscilatorias y sobreimpulsos suaves que paulatinamente se van atenuando hasta alcanzar el estado estacionario.

La función de transferencia $G(s)$ del sistema (9.1a-9.1b) está dada por:

$$G(s) = \frac{\text{num}(s)}{\text{den}(s)} = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\rho w_n s + w_n^2} = \frac{0.49}{s^2 + 1.12s + 0.49} \tag{9.3}$$

debido a que el factor de amortiguamiento ρ es menor a uno, la función de transferencia $G(s)$ tiene dos polos complejos conjugados, los cuales se obtienen mediante programación. En la ventana de comandos de **Matlab** se obtienen los polos de la función de transferencia $G(s)$ (ceros del polinomio denominador den(s)):

```
fx >> format short ↩
fx >> den=[1, 1.2, 0.49];%denominador den(s) = s^2 + 1.2s + 0.49 ↩
fx >> r=roots(den) %raíces o ceros del polinomio denominador. ↩
       r=
                    -0.6000 + 0.3606i
                    -0.6000 - 0.3606i
```

Otra forma de obtener el mismo resultado es a través del cálculo de los valores propios de la matriz A del sistema (9.1a), por medio de las siguientes instrucciones:

```
fx >> format short ↩
fx >> A=[0, 1; -0.49, -1.2];%inicializa A = [ 0      1 ; -0.49  -1.2 ]. ↩
fx >> eig(A) %valores propios de la matriz A ∈ ℝ^{2×2}. ↩
       ans=
                    -0.6000 + 0.3606i
                    -0.6000 - 0.3606i
```

Debido a que la función de transferencia $G(s)$ (9.3) tiene dos polos complejos conjugados (valores propios de la matriz A), el procedimiento para obtener los coeficientes α_0 y α_1 que forman a la matriz $\Phi \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ consta de los siguientes pasos:

$$e^{(-0.6000 + 0.3606i)h} = \alpha_0 + (-0.6000 + 0.3606i)\,\alpha_1 \tag{9.4a}$$

$$e^{-(0.6000 + 0.3606i)h} = \alpha_0 - (0.6000 + 0.3606i)\,\alpha_1 \tag{9.4b}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (9.4a)-(9.4b):

Multiplicando por -1 a la ecuación (9.4b) y substrayendo con la ecuación (9.4a) se obtienen las siguientes operaciones:

$$e^{(-0.6000+0.3606i)h} = \cancel{\alpha_0} + (\cancel{-0.6000} + 0.3606i)\,\alpha_1 \quad (9.5a)$$

$$-e^{-(0.6000+0.3606i)h} = \cancel{-\alpha_0} + (\cancel{0.6000} + 0.3606i)\,\alpha_1 \quad (9.5b)$$

$$e^{-0.6h}\left[e^{0.3606i\ h} - e^{-0.3606i\ h}\right] = i2\ (0.3606)\ \alpha_1 \quad (9.5c)$$

Tomando en cuenta que:

$$e^{0.3606i} = \cos(0.3606h) + i\ \mathrm{sen}(0.3606h)$$

$$e^{-0.3606i} = \cos(0.3606h) - \ \mathrm{sen}(0.3606h)$$

se obtiene:

$$e^{-0.6h}\left[\cancel{\cos(0.3606\ h)} + i\ \mathrm{sen}(0.3606\ h) - \cancel{\cos(0.3606\ h)} + i\ \mathrm{sen}(0.3606\ h)\right] = i\ 2\ (0.3606)\ \alpha_1 \quad (9.6)$$

$$\cancel{i}\ \cancel{2}e^{-0.6h}\ \mathrm{sen}(0.3606\ h) = \cancel{i}\ \cancel{2}\ (0.3606)\ \alpha_1 \quad (9.7)$$

$$\alpha_1 = e^{-0.6h}\frac{\mathrm{sen}(0.3606\ h)}{0.3606} \quad (9.8)$$

Para encontrar α_0 se sustituye α_1 (**??**) en la ecuación (9.4a):

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= e^{(-0.6+0.3606i)h} + 0.6\alpha_1 - 0.3606\alpha_1\ i \quad (9.9)\\
&= e^{-0.6h}\left[\ \cos(0.3606h) + i\ \mathrm{sen}(0.3606h)\right] + 0.6e^{-0.6}\frac{\mathrm{sen}(0.3606h)}{0.3606}\\
&\quad \cancel{-0.3606}\ ie^{-0.6}\frac{\mathrm{sen}(0.3606h)}{\cancel{0.3606}}\\
&= e^{-0.6h}\left[\ \cos(0.3606h) + i\ \mathrm{sen}(0.3606h)\right] + 0.6e^{-0.6}\frac{\mathrm{sen}(0.3606h)}{0.3606}\\
&\quad -ie^{-0.6}\ \mathrm{sen}(0.3606h)\\
&= e^{-0.6h}\cos(0.3606h) + \cancel{ie^{-0.6h}\ \mathrm{sen}(0.3606h)} + 0.6e^{-0.6}\frac{\mathrm{sen}(0.3606h)}{0.3606}\\
&\quad \cancel{-ie^{-0.6}\ \mathrm{sen}(0.3606h)}\\
\alpha_0 &= e^{-0.6h}\left[\ \cos(0.3606h) + 0.6\frac{\mathrm{sen}(0.3606h)}{0.3606}\right] \quad (9.10)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la matriz $\Phi = [\,\alpha_0 I + \alpha_1 A\,] \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ toma la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
\Phi &= \alpha_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.49 & -1.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0 & 0 \\ 0 & \alpha_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \alpha_1 \\ -0.49\alpha_1 & -1.2\alpha_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \\ -0.49\alpha_1 & \alpha_0 - 1.2\alpha_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} e^{-0.6h}\,[\,\cos(0.3606h) + 0.6\frac{\operatorname{sen}(0.3606h)}{0.3606}\,] & e^{-0.6h}\,\frac{\operatorname{sen}(0.3606h)}{0.3606} \\ -0.49\,e^{-0.6h}\,\frac{\operatorname{sen}(0.3606\,h)}{0.3606} & e^{-0.6h}\,[\,\cos(0.3606h) + \cancel{0.6\frac{\operatorname{sen}(0.3606h)}{0.3606}} - \cancel{1.2\frac{\operatorname{sen}(0.3606h)}{0.3606}}\,] \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} e^{-0.6h}\,[\,\cos(0.3606h) + 0.6\frac{\operatorname{sen}(0.3606h)}{0.3606}\,] & e^{-0.6h}\,\frac{\operatorname{sen}(0.3606h)}{0.3606} \\ -0.49\,e^{-0.6h}\,\frac{\operatorname{sen}(0.3606h)}{0.3606} & e^{-0.6h}\,[\,\cos(0.3606h) - 0.6\frac{\operatorname{sen}(0.3606h)}{0.3606}\,] \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Resolviendo la expresión para Γ conduce a:

$$
\begin{aligned}
\Gamma &= \int_0^h e^{Ah} B dh \\
&= \int_0^h \begin{bmatrix} e^{-0.6h}\,[\,\cos(0.3606h) + 0.6\frac{\operatorname{sen}(0.3606h)}{0.3606}\,] & e^{-0.6h}\,\frac{\operatorname{sen}(0.3606h)}{0.3606} \\ -0.49\,e^{-0.6h}\,\frac{\operatorname{sen}(0.3606h)}{0.3606} & e^{-0.6h}\,[\,\cos(0.3606h) - 0.6\frac{\operatorname{sen}(0.3606h)}{0.3606}\,] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.49 \end{bmatrix} dh \\
&= \int_0^h \begin{bmatrix} 0.49\,e^{-0.6h}\,\frac{\operatorname{sen}(0.3606h)}{0.3606} \\ 0.49\,e^{-0.6h}\,[\,\cos(0.3606h) - 0.6\frac{\operatorname{sen}(0.3606h)}{0.3606}\,] \end{bmatrix} dh
\end{aligned}
$$

$$
\Gamma = \begin{bmatrix} 0.9999339635 - 0.001663783633e^{-0.6h}\,[\,601.0\,\cos(0.3606h + 1000.0\,\operatorname{sen}(0.3606h)\,] \\ -e^{-0.6h}\,[\,4.09\times 10^{-12}\,\cos(0.3606h) - 1.358846367\,\operatorname{sen}(0.3606h)\,] \end{bmatrix} \qquad (9.11
$$

Los programas que se emplean son:

En **Matlab** los scripts: **cap9_simusistema2doA.m** y **cap9_sistema2doA.m** (ambos archivos deberán colocarse en la misma carpeta que definió el lector).

Por Arduino el sketch: **cap9_sistema2dokA.ino**

La figura 9.1 muestra los resultados comparativos del sistema dinámico simulado (9.1a-9.1b) entre la integración numérica Runge-Kutta y el sistema discreto $\boldsymbol{x}(t_k) = \Phi\boldsymbol{x}(t_{k-1}) + \Gamma u(t_{k-1})$.

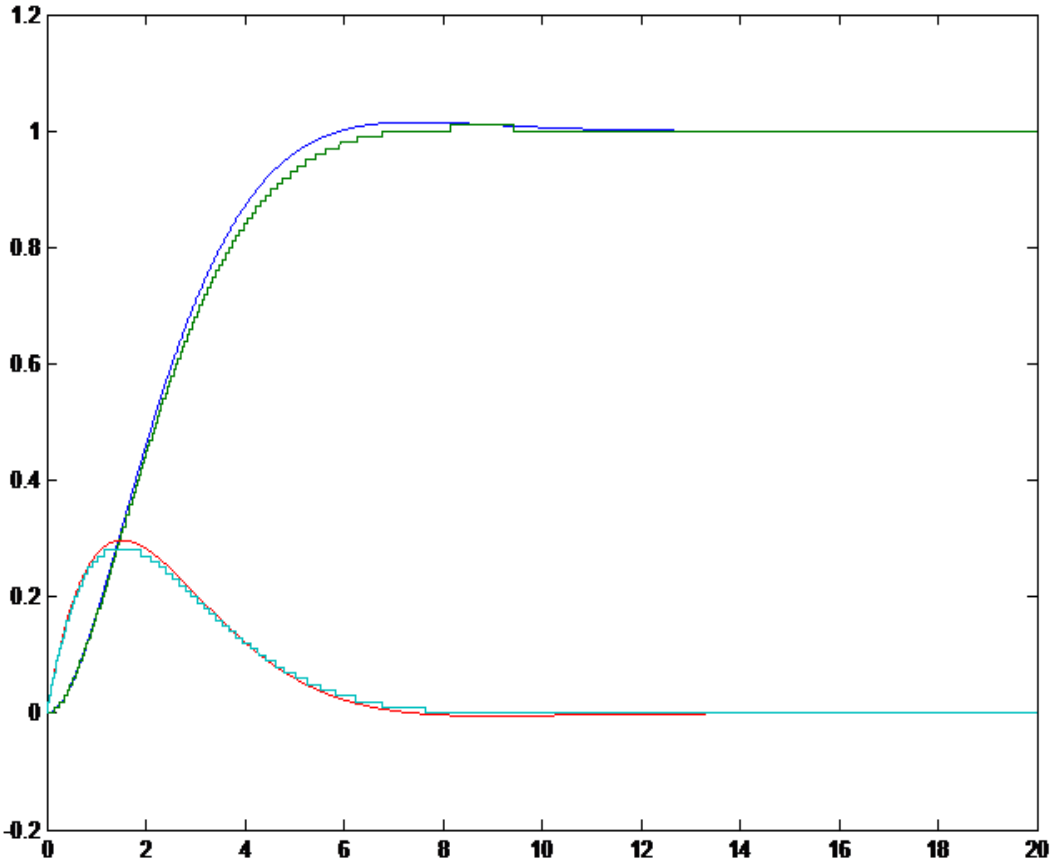


Figura 9.1 Comparación entre la posición $x_1(t)$, vs $x_1(t_k)$ y velocidad $x_2(t)$, vs $x_2(t_k)$.