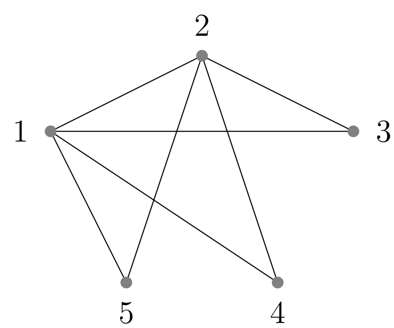
Respuestas a los problemas impares del capítulo 18

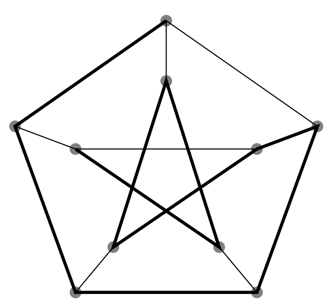
Ciclos Hamiltonianos

18.1 El grafo de la figura de abajo es Euleriano porque todos los vértices tienen grado par, pero no es Hamiltoniano porque $G - \{1, 2\}$ tiene tres componentes.



18.3 Sin pérdida de generalidad $|X| < |Y|$. Por lo tanto el número de componentes de $G - X$ es $|Y| > |X|$, por lo tanto G no es Hamiltoniano.

18.5



18.7 G^c es $(n-1-k)$-regular. Por lo tanto si u, v no son adyacentes en G^c entonces

$$d_{G^c}(u) + d_{G^c}(v) = 2(n-1-k) = 2n-2-2k \geq 2n-n = n.$$

De ahí que, por el teorema de Ore, G^c es Hamiltoniano.

Emparejamientos

18.9 P_n tiene un emparejamiento perfecto si y sólo si n es par.

18.11 El k-cubo Q_k es bipartito y k-regular, por lo que por el corolario 18.2 tiene un emparejamiento perfecto.

18.13 El problema es equivalente a encontrar el número de funciones biyectivas entre conjuntos de cardinalidad n. Este número es $n!$.

18.15 Sea M un emparejamiento perfecto en G. Sea $S \subseteq V$ y sean $S_1 = S \cap X$, $S_2 = S \cap Y$. Por lo tanto $S = S_1 \cup S_2$ y $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. Como M cubre todos los vértices en X y todos los vértices en Y, se sigue del teorema de Hall que $|N(S_1)| \geq |S_1|$ y $|N(S_2)| \geq |S_2|$, de ahí que $|N(S)| = |N(S_1)| + |N(S_2)| \geq |S_1| + |S_2| = |S|$.

Recíprocamente, si $|N(S)| \geq |S|$ para todo $S \subseteq V$, en particular $|N(S)| \geq |S|$ para todo $S \subseteq X$ y $|N(S)| \geq |S|$ para todo $S \subseteq Y$, por lo que, por el teorema de Hall, existe un emparejamiento M que cubre todos los vértices en X y todos los vértices en Y, por lo que el emparejamiento es perfecto.

18.17 Sea $G = (X \cup Y, E)$ una gráfica bipartita. Construyamos la red de flujo R con conjunto de vértices $V = X \cup Y \cup \{s, t\}$ y conjunto de arcos

$$A = \{(s, x) \mid x \in X\} \cup \{(x, y) \mid xy \in E\} \cup \{(y, t) \mid y \in Y\}.$$

Supongamos además que todas las capacidades son unitarias. Entonces f es un flujo máximo en R si y sólo si el conjunto

$$M = \{xy \in E \mid f(x, y) = 1\}$$

es un emparejamiento máximo en G.

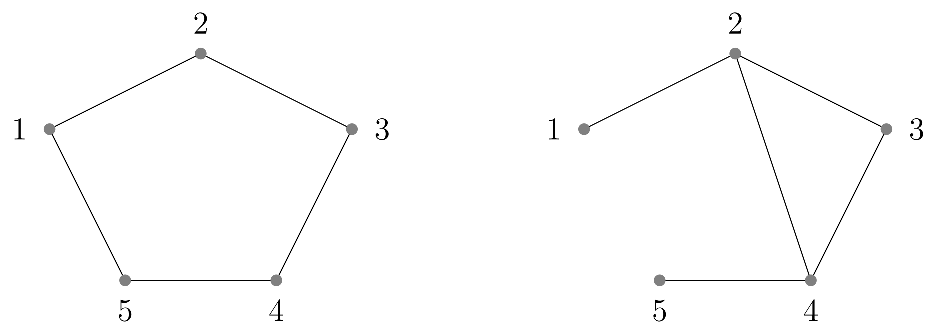
Grafos aplanables

18.19 Como hay 62 regiones y cada región tiene grado al menos cinco, se sigue que $2m \geq 5(62) = 310$. Por lo tanto $m \geq 155$. De ahí que, por la fórmula de Euler, $n = m - q + 2 \geq 155 - 62 + 2 = 95$.

18.21 Si la longitud del ciclo más corto en G es 5, entonces $d(r) \geq 5$ para todo $r \in R$. Por lo tanto $2m \geq 5q$. Por otra parte, por la fórmula de Euler: $2 = n - m + q$, de ahí que $10 = 5n - 5m + 5q \leq 5n - 5m + 2m = 5n - 3m$. Por lo tanto $3m \leq 5n - 10 = 5(n - 2)$.

Coloración de vértices

18.23



18.25 Por inducción sobre $n = r + s$. Si $n = 2$ entonces $K_{r,s} = K_{1,1}$ consta de dos vértices unidos por una arista. Independientemente de la etiquetación de los vértices el algoritmo de coloración secuencial asignará un color a uno de los vértices y otro color al otro vértice. Supongamos que el resultado es cierto para todo grafo bipartito con n vértices y consideremos un grafo bipartito con $n + 1$ vértices. Por lo tanto $G - v_{n+1}$ es un grafo bipartito con n vértices. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $v_{n+1} \in Y$. Por hipótesis de inducción el algoritmo de coloración secuencial asigna a todo vértice en X el mismo color (digamos el color 1) y a todo vértice en Y el mismo color (el color 2). Como $N(v_{n+1}) = X$, entonces el algoritmo de coloración secuencial asignará a este vértice el color 2.

18.27 G es conexa y no es ni un ciclo de longitud impar ni un grafo completo, además $\triangle(G) = 3$, por lo que, por el teorema de Brooks: $\chi(G) \leq 3$. Como además $\omega(G) = 3$, se sigue del teorema 11.15 que $3 \leq \chi(G)$, de ahí que $\chi(G) = 3$.

18.29 Las k-coloraciones de componentes distintas son independientes, por lo que, por el principio del producto:

$$P_G(k) = P_{G_1}(k) P_{G_2}(k) \cdots P_{G_r}(k).$$

18.31 Si $n = 3$ tenemos k maneras de colorear un vértice, después tenemos $k - 1$ maneras de colorear un vértice distinto y $k - 2$ formas de colorear el tercer vértice, por lo que, por el principio del producto tenemos que $P_G(k) = k(k-1)(k-2) = (k-1)^3 - (k-1)$. Supongamos ahora que el resultado es cierto para ciclos con menos de n vértices. Sea G un ciclo con n vértices y sea e una arista del ciclo. Por lo tanto $G_1 = G - e$ es una trayectoria de longitud $n-1$ y $G_2 = G/e$ es un ciclo de longitud $n-1$. Como toda trayectoria es un árbol, se sigue del ejercicio anterior que

$$P_{G_1}(k) = k(k-1)^{n-1}.$$

Por otra parte, por hipótesis de inducción:

$$P_{G_2}(k) = (k-1)^{n-1} - (-1)^{n-1}(k-1).$$

Por lo que, por el teorema 18.19:

$$\begin{aligned}
P_G(k) &= P_{G_1}(k) - P_{G_2}(k) \\
&= k(k-1)^{n-1} - (k-1)^{n-1} - (-1)^{n-1}(k-1) \\
&= (k-1)^{n-1}(k-1) + (-1)^n(k-1) \\
&= (k-1)^n + (-1)^n(k-1).
\end{aligned}$$